

UNIVERSITATEA POLITEHNICA DIN BUCUREȘTI

2016

CULEGERE DE PROBLEME REZOLVATE

INSTRUMENTAȚIE ELECTRONICĂ DE MĂSURĂ

AUTORI:

ROBERT-ALEXANDRU DOBRE

ALINA-ELENA MARCU

LISTA ACRONIMELOR

A

AO: amplificator operațional, 28, 29, 30, 32, 34, 38, 39, 40, 63, 65

B

B: bază binară, 7, 8

C

C2: complement față de 2, 8, 14, 16, 18, 19

CAN: convertor analog-numeric, 9, 10, 11, 12, 24, 45, 49, 54, 74

CBD: cod binar deplasat, 8, 10, 13, 14, 21, 22, 24, 25, 26

CMS: cod mărime și semn, 8

CNA: convertor numeric-analogic, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 74

D

D: bază decimală, 7, 8

H

H: bază hexazecimală, 7

O

O: bază octală, 7

R

RRS: raportul de rejecție serie, 59, 61, 64

Capitolul 1. Conversoare Numeric – Analogice. Conversoare Analog – Numerice.

BREVIAR TEORETIC

REPREZENTAREA BINARĂ A NUMERELOR POZITIVE

Un sistem de numerație este constituit dintr-o mulțime finită de simboluri elementare denumite generic cifre și dintr-un set de reguli folosite pentru reprezentarea unui număr. Numărul total de cifre distincte utilizate definește baza sistemului de numerație. Aceasta se notează cu b , trebuie să satisfacă condiția ca $b > 1$ și numerele reprezentate se folosesc de cifre cuprinse în intervalul $[0, b - 1]$. Un număr se poate exprima astfel: $N_b \rightarrow a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} \dots a_{-m}$, iar valoarea lui se poate determina astfel: $N = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0 + a_{-1} \cdot b^{-1} + \dots + a_{-m} \cdot b^{-m}$.

Sistemele de numerație cele mai răspândite sunt: sistemul binar (se notează cu B și are baza 2), sistemul octal (se notează cu O și are baza 8), sistemul zecimal (se notează cu D și are baza 10) și sistemul hexazecimal (se notează cu H și are baza 16). Sistemul de numerație zecimal (se notează cu D) este folosit pentru a realiza interacțiunea dintre om și un sistem de calcul, numărul de cifre utilizate fiind 10, de la cifra 0 până la cifra 9.

Mai multe numere reprezentate în baze diferite pot arata identic, dar avea valori diferite. De exemplu numărul 1001 în octal are valoarea 513 în zecimal pe când numărul 1001 dar reprezentat în binar are valoarea 9 în zecimal. Din acest motiv, după reprezentarea fiecărui număr, se va indica baza de numerație folosită astfel: $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 |_X$, unde $a_n \dots a_0$ sunt cifrele care alcătuiesc numărul și X este indicatorul bazei de numerație folosite (notații amintite în paragraful anterior – B, O, D, H etc.). Așadar de acum este clar faptul că $1001|_D$ este cu totul diferit de $1001|_B$.

Sistemul de numerație binar este sistemul de numerație în baza 2, fiind folosit pentru reprezentarea internă a numerelor în sistemele de calcul, numărul de cifre utilizate fiind 2: 0 și 1. Aceste cifre se numesc cifre binare sau biți. Un număr binar se poate exprima astfel:

Exemplu: $1101,011|_B \Rightarrow N = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 8 + 4 + 1 + 0 + 0,25 + 0,125 = 13,375|_D$

Pentru a face conversia unui număr din sistemul zecimal în sistemul binar se împarte numărul zecimal la 2, obținându-se astfel restul, apoi câtul se împarte la 2 și se obține un nou rest. Împărțirea se oprește în momentul în care câtul devine 0. Numărul convertit se obține scriind toate resturile în ordine inversă, de la ultimul rest la primul rest. Pentru exemplul de mai sus vom obține: $13_{10} = 1101_2$

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 12632} \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

Conversia părții zecimale a unui număr din sistemul zecimal în alt sistem de numerație se realizează înmulțind succesiv partea fracționară cu numărul bazei în care facem conversia (2 pentru sistemul binar, 8 pentru sistemul octal, 16 pentru sistemul hexazecimal). Numărul convertit este

reprezentat de partea întreagă a fiecărei înmulțiri. Conversia se oprește în momentul în care partea fracționară a rezultatului înmulțirii cu numărul bazei devine zero. În cazul în care aceasta devine zero după un număr foarte mare de înmulțiri se stabilește în prealabil numărul de cifre a părții zecimale. Pentru exemplul de mai sus vom obține: $0,375|_D = 0,011|_B$

$$\begin{array}{l} 0,375 \cdot 2 = 0,75 \\ 0,75 \cdot 2 = 1,5 \\ 0,5 \cdot 2 = 1,0 \end{array}$$

Sistemul de numerație octal este sistemul de numerație în baza 8, fiind folosit pentru a comprima șirurile lungi de biți din reprezentarea unui număr în baza 2, numărul de cifre folosit fiind 8: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 și 7. Un număr octal se poate exprima astfel:

Exemplu: $25,46|_O \Rightarrow N = 2 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 + 4 \cdot 8^{-1} + 6 \cdot 8^{-2} = 16 + 5 + 0,5 + 0,09375 = 21,59375|_D$

Pentru a face conversia unui număr din sistemul octal în sistemul binar se înlocuiește fiecare cifră octală cu reprezentarea ei binară pe 3 biți. Pentru exemplul de mai sus vom avea: $25,46|_O \leftrightarrow 010101,100110|_B$. Conversia din sistem binar în sistem octal se face înlocuind fiecare grup de 3 cifre alăturate cu cifra octală corespunzătoare. Grupările se fac începând de la punctul zecimal către stânga și către dreapta. Pentru exemplu de mai sus: $10101,100110|_B \rightarrow 010\ 101,100\ 110|_B \rightarrow 2|_O\ 5|_O,4|_O\ 6|_O \rightarrow 25,46|_O$.

Conversia unui număr din sistemul zecimal în sistemul octal se face asemănător cu conversia din sistemul zecimal în sistemul binar, singura diferență intervine în cadrul împărțirii care se face la 8 în loc de 2. Pentru exemplul dat vom obține: $21,59375|_D = 25,46|_O$.

$$\begin{array}{r|l} 21 & 8 \\ \hline 16 & 2\ 8 \\ \hline 5 & 0\ 0 \\ \hline & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0,59375 \cdot 8 = 4,75 \\ 0,75 \cdot 8 = 6,0 \end{array}$$

O altă metodă pentru a face conversia unui număr din sistemul zecimal în sistemul octal este prin intermediul sistemului binar, trecând numărul mai întâi în sistemul binar și apoi în sistemul octal. Vom obține: $21|_D = 010101|_B = 010\ 101|_B = 2|_O\ 5|_O = 25|_O$.

Sistemul de numerație hexazecimal este sistemul de numerație în baza 16, fiind folosit pentru a reprezenta numere de mai mulți biți. Numărul de cifre folosit fiind 16: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 și literele A (10), B (11), C (12), D (13), E (14) și F (15). Un număr hexazecimal se poate exprima astfel:

Exemplu: $86C,A2|_H = 8 \cdot 16^2 + 6 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 + 10 \cdot 16^{-1} + 2 \cdot 16^{-2} = 2048 + 96 + 12 + 0,625 + 0,0078 = 2156,6328|_D$

Conversia unui număr din sistemul zecimal în sistemul hexazecimal se face împărțind succesiv numărul zecimal la 16, apoi caturile obținute, reținându-se resturile până în momentul în care câtul devine 0. Numărul convertit se obține scriind toate resturile în ordine inversă, de la ultimul rest la primul rest. Vom obține pentru exemplul de mai sus: $2156,6328|_D = 86C,A2|_H$.

$$\begin{array}{r|l} 2156 & 16 \\ \hline 2144 & 134\ 16 \\ \hline & 12\ 128\ 8\ 16 \\ \hline & 6\ 0\ 0 \\ \hline & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0,6328 \cdot 16 = 10,125 \\ 0,125 \cdot 16 = 2,0 \end{array}$$

Pentru a face conversia unui număr din sistemul hexazecimal în sistemul binar se înlocuiește fiecare cifră hexazecimală cu reprezentarea ei binară pe 4 biți. Pentru exemplul dat vom avea: $86C, A2|_H = 1000\ 0110\ 1100, 1010\ 0010|_B$. Conversia din sistem binar în sistem hexazecimal se face înlocuind fiecare grup de 4 cifre alăturate cu cifra hexazecimală corespunzătoare. Grupările se fac începând de la punctul zecimal spre stânga, respectiv dreapta. Pentru exemplul ales vom obține: $100001101100, 10100010|_B \rightarrow 1000\ 0110\ 1100, 1010\ 0010|_B \rightarrow 8|_H\ 6|_H\ C|_H, A|_H\ 2|_H \rightarrow 86C, A2|_H$.

Conversia unui număr din sistemul hexazecimal în sistemul octal se poate face prin intermediul sistemului binar, trecând mai întâi numărul în sistemul binar și apoi în sistemul octal. De exemplu: $86C, A2|_H = 100\ 001\ 101\ 100, 101\ 000\ 100|_B \rightarrow 4|_O\ 1|_O\ 5|_O\ 4|_O, 5|_O\ 0|_O\ 4|_O \rightarrow 4154, 504|_O$. Conversia din sistemul octal în sistemul hexazecimal se poate face convertind numărul în sistemul binar, apoi grupând cifrele obținute în grupuri de câte 4 și înlocuindu-le cu cifra hexazecimală corespunzătoare. Vom obține: $4154, 502|_O \rightarrow 1000\ 0110\ 1100, 1010\ 0010|_B \rightarrow 8|_H\ 6|_H\ C|_H, A|_H\ 2|_H \rightarrow 86C, A2|_H$.

REPREZENTAREA BINARĂ A NUMERELOR NEGATIVE

Dacă până acum am învățat să reprezentăm prin intermediul sistemelor de numerație numerele pozitive, în continuare vom vedea cum se pot reprezenta și numerele negative prin intermediul codului direct (denumit uzual ca cod mărime și semn), codului invers (denumit uzual ca cod complement față de 1) și codului complementar (denumit uzual ca cod complement față de 2). Un număr întreg cu semn, reprezentat pe n biți se poate exprima astfel: $N = b_{n-1}b_{n-2} \dots b_0$, unde bitul b_{n-1} reprezintă bitul de semn, bitul b_{n-2} reprezintă cel mai semnificativ bit (bitul cu ponderea 2^{n-2}), iar b_0 este bitul cel mai puțin semnificativ (bitul cu ponderea 2^0). Pentru numerele fracționare subunitare reprezentate pe n biți se folosește notația: $N_f = b_0b_{-1} \dots b_{-(n-1)}$, unde bitul b_0 reprezintă bitul de semn, bitul b_{-1} reprezintă cel mai semnificativ bit (bitul cu ponderea 2^{-1}), iar $b_{-(n-1)}$ este bitul cel mai puțin semnificativ (bitul cu ponderea $2^{-(n-1)}$). Ca o observație, se consideră că virgula este plasată între bitul de semn și bitul cel mai semnificativ (bitul b_{-1}). Bitul de semn pentru numere pozitive are valoarea 0, iar pentru numere negative are valoarea 1. Restul de $N-1$ biți rămași vor fi folosiți pentru reprezentarea valorii numărului.

REPREZENTAREA NUMERELOR PRIN COD MĂRIME ȘI SEMN

În sistemul de reprezentare prin cod mărime și semn, prima cifră din cadrul numărului reprezintă semnul, iar celelalte cifre reprezintă valoarea numărului scrisă în cod binar. Domeniul de reprezentare pentru numerele întregi este: $-(2^{n-1} - 1) \leq N \leq 2^{n-1} - 1$, iar pentru numerele fracționare este $-(1 - 2^{1-n}) \leq N_f \leq (1 - 2^{1-n})$. De reținut este faptul că pentru cifra 0 există două reprezentări: 00000000 și 10000000. Un număr întreg se poate reprezenta prin mărime și semn astfel: $+53|_D \rightarrow 00110101|_{CMS}$, iar $-53|_D \rightarrow 10110101|_{CMS}$. Un număr fracționar se poate reprezenta prin: $+0,1450891|_D \rightarrow 001001|_{CMS}$, iar $-0,1450891|_D \rightarrow 101001|_{CMS}$.

$$\begin{aligned} 0,1450891 \cdot 2 &= 0,2901782 \\ 0,2901782 \cdot 2 &= 0,5803564 \\ 0,5803564 \cdot 2 &= 1,1607128 \\ 0,1607128 \cdot 2 &= 0,3214256 \\ 0,3214256 \cdot 2 &= 0,6428512 \\ 0,6428512 \cdot 2 &= 1,2857024 \end{aligned}$$

REPREZENTAREA NUMERELOR PRIN COD COMPLEMENT FAȚĂ DE 1

În reprezentarea prin intermediul codului complement față de 1 numerele negative se obțin prin complementarea bit cu bit (biții “0” devin “1”, iar biții “1” devin “0”) a reprezentării codului mărime și semn. Bitul de semn este mereu 1. Pentru numerele pozitive reprezentarea codului complement față de 1 este identică cu reprezentarea făcută prin intermediul codului mărime și semn. Și în cadrul acestui cod pentru cifra 0 există două reprezentări diferite: 00000000 și 10000000. Un număr întreg se poate reprezenta prin intermediul codului complement față de 1 astfel: $+53|_D \rightarrow 00110101|_{C1}$, iar $-53|_D \rightarrow 10110101|_{CMS} \rightarrow 11001010|_{C1}$. Un număr fracționar se poate reprezenta prin codul complement față de 1 astfel: $+0,1450891|_D \rightarrow 001001|_{C1}$, iar $-0,1450891|_D \rightarrow 101001|_{CMS} \rightarrow 110110|_{C1}$.

REPREZENTAREA NUMERELOR PRIN COD COMPLEMENT FAȚĂ DE 2

În reprezentarea complement față de 2 numerele negative se obțin prin intermediul a două etape: în prima se reprezintă numărul prin intermediul codului complement față de 1, iar în etapa a doua se adună cifra binară “1” la bitul cel mai puțin semnificativ. Reprezentarea pentru numerele pozitive este identică cu reprezentarea făcută prin codul mărime și semn. Un număr întreg se poate reprezenta prin intermediul codului complement față de 2 astfel: $+53|_D \rightarrow 00110101|_{C2}$, iar $-53|_D \rightarrow 10110101|_{CMS} \rightarrow 11001010|_{C1} \rightarrow 11001011|_{C2}$. Un număr fracționar se poate reprezenta prin codul complement față de 2 astfel: $+0,1450891|_D \rightarrow 001001|_{C2}$, iar $-0,1450891|_D \rightarrow 101001|_{CMS} \rightarrow 110110|_{C1} \rightarrow 110111|_{C2}$.

REPREZENTAREA NUMERELOR PRIN COD BINAR DEPLASAT

Reprezentarea prin intermediul codului binar deplasat se obține prin complementarea bitului de semn din reprezentarea în cod complement față de 2. Un număr întreg se poate reprezenta astfel: $+53|_D \rightarrow 00110101|_{C2} \rightarrow 10110101|_{CBD}$, iar $-53|_D \rightarrow 10110101|_{CMS} \rightarrow 11001011|_{C2} \rightarrow 01001011|_{CBD}$. Un număr fracționar se reprezintă astfel: $+0,1450891|_D \rightarrow 001001|_{C2} \rightarrow 101001|_{CBD}$, iar $-0,1450891|_D \rightarrow 110111|_{C2} \rightarrow 010111|_{CBD}$.

Notă: în alegerea de față se vor folosi preponderent numerele subunitare.

$$C2: N = -2^0 \cdot b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \cdot 2^{-k} \quad (1)$$

$$CBD: N = -2^0 \overline{b_0} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \cdot 2^{-k} \quad (2)$$

Relații de conversie:

$$CBN: V_{OUT}(N) = V_R \cdot N = V_R \sum_{k=1}^n b_k \cdot 2^{-k} \quad (3)$$

$$CBD: V_{OUT}(N) = V_R \left(-\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n b_k \cdot 2^{-k} \right) \quad (4)$$

$$C2: V_{OUT}(N) = V_R \left(-\frac{b_1}{2} + \sum_{k=2}^n b_k \cdot 2^{-k} \right) \quad (5)$$

APLICATII

Problema 1.1. Să se realizeze următoarele conversii pe număr minim de cifre:

- a) în bază decimală (D), octală (O) și hexazecimală (H) a numărului binar $101101,010101|_B$;
- b) în bază binară (B), octală și hexazecimală a numărului zecimal 39,26 cu o eroare maximă (în baza zecimală) de 0,002. Care este numărul de cifre necesar pentru fiecare conversie?

Rezolvare:

$$\text{a) } 101101,010101|_B = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 0 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} = 32 + 8 + 4 + 1 + 0,25 + 0,0625 + 0,015625 = 45,328125|_D$$

$$\underbrace{101101}_5, \underbrace{010101}_2|_B \rightarrow 55,25|_O$$

$$\underbrace{00101101}_2, \underbrace{01010100}_D \rightarrow 2D,54|_H$$

Unele numere din baza decimală nu vor putea fi scrise în baza 2 pe un număr finit de cifre deoarece algoritmul de conversie nu va ajunge niciodată la condiția de oprire prezentată în breviar. În aceste cazuri va exista o diferență (eroare) între valorile celor două reprezentări. Cu cât reprezentarea se face folosind mai multe cifre, cu atât această diferență devine din ce în ce mai mică. Numărul de cifre cu care va fi reprezentat numărul în noua bază trebuie determinat în funcție de diferența maximă acceptată. Practic trebuie determinat a câta cifră după punctul zecimal (virgulă) determină o modificare a numărului mai mică decât diferența impusă. Se cunoaște faptul că, în baza 2, a x-a cifră după virgulă corespunde unei valori egale cu 2^{-x} , în baza 8 cu 8^{-x} și așa mai departe. Astfel:

$$e_D \leq 0,002 \Rightarrow e_B : 2^{-x} \leq 0,002 \Rightarrow -x \leq \log_2 0,002 \Rightarrow -x \leq -8,965784 \Rightarrow x = 9$$

$$e_O : 8^{-x} \leq 0,002 \Rightarrow -x \leq \log_8 0,002 \Rightarrow x = 3$$

$$e_H : 16^{-x} \leq 0,002 \Rightarrow -x \leq \log_{16} 0,002 \Rightarrow -x \leq -2,241446 \Rightarrow x = 3$$

Număr cifre necesar pentru fiecare conversie este:

$$B : 2^5 < 39 < 2^6 \Rightarrow 6 \text{ biți pentru partea întreagă.}$$

Conform breviarului teoretic partea întreagă a numărului 39 se scrie în binar $39|_D =$

$100111|_B$, iar partea zecimală reprezentată pe numărul de biți determinat mai sus (9 biți) $0,26|_D = 010000101$.

Pentru a calcula diferența dintre valorile celor două reprezentări (eroarea) vom converti numărul trunchiat, reprezentat cu 15 biți, înapoi în baza decimală și vom face diferența între valoarea inițială și valoarea obținută după trunchiere. Pentru cazul reprezentării binare:

$$100111,010000101|_B = 39,259765625|_D$$

$e = 39,26 - 39,259765625 = 0,000234375 < e_D$, deci conversia a fost făcută pe un număr minim, dar suficient, de cifre pentru ca valoarea reprezentării în noua bază să difere suficient de puțin (sub eroarea impusă) de valoarea inițială. Similar se poate verifica faptul că 8 biți nu ar fi fost suficienți.

Problema 1.2. Reprezentați în complement față de 2 (C2), cod binar deplasat (CBD) și cod mărime și semn (CMS) numărul $0,390625$ și $-0,390625$.

Rezolvare:

a) Pentru conversia numărului $0,390625$ în cod complement față de 2 se scrie întâi numărul în binar $0,390625|_D = 011001|_B$, apoi se adaugă bitul de semn (0 pentru numere pozitive, 1 pentru numere negative) rezultând $0,390625|_D = 0011001|_{CD}$.

Pentru numărul $-0,390625|_D$ o altă metodă de reprezentare față de cea descrisă în breviar o reprezintă: $-0,390625|_D \rightarrow \overline{CD} + 1 \rightarrow \overline{0011001} + 1 = 1100110 + 1 = 1100111|_{CD}$.

b) Conversia în cod binar deplasat se face negând bitul de semn din reprezentarea în cod complement față de 2: $0,390625|_D = 1011001|_{CBD}$, iar $-0,390625|_D = 0100111|_{CBD}$.

c) Pentru conversia în cod mărime și semn numerele $0,390625$ și $-0,390625$ se reprezintă în binar și se adaugă bitul de semn: $0,390625|_D = 0011001|_{CMS}$, iar $-0,390625|_D = 1011001|_{CMS}$.

Problema 1.3. Reprezentați în baza 2 (B) numărul zecimal (D) $23,65$.

Rezolvare:

a) Conform breviarului teoretic numărul zecimal se reprezintă astfel: $23,65|_D = 10111,1010011|_B$. Se observă că algoritmul ar continua la infinit deoarece valorile obținute în cadrul acestuia se repetă. Astfel s-a trunchiat rezultatul la secvența obținută până la începerea repetării. Este evident faptul că această valoare trunchiată va diferi de valoarea inițială, deci există o eroare cu care s-a făcut reprezentarea. Un fenomen similar a fost întâmpinat la problema 1.1.

b) Determinați eroarea rezultată din trunchierea la 7 biți a reprezentării numărului în binar. $10111,1010011|_B = 23,6484375|_D \Rightarrow e_D = 23,65 - 23,6484375 = 0,001625 \Rightarrow \epsilon = \frac{0,001625}{23,65} \cdot 100 = 0,006\%$.

Problema 1.4. Realizați următoarele operații pentru numere binare subunitare reprezentate în complement față de 2 (C2):

- sumele pe 5 biți pentru $(01010 + 00101)$ și $(11100 + 11001)$;
- produsul cu rezultatul pe 8 biți (inclusiv bitul de semn) pentru $(01011 \cdot 0101)$.

Rezolvare:

Adunarea și înmulțirea numerelor binare se efectuează la fel ca la numerele zecimale.

$$\begin{array}{rcl} \text{a) } 01010 & \rightarrow 2^{-1} + 2^{-3} = 0,5 + 0,125 = 0,625 \\ 00101 & \rightarrow 2^{-2} + 2^{-4} = 0,25 + 0,0625 = 0,3125 \\ \hline 01111 & \rightarrow 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} = 0,5 + 0,25 + 0,125 + 0,0625 = 0,9375 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} 01010 \\ 00101 \\ 01111 \end{array}} \right\} 0,9375$$

$$\begin{array}{rcl}
 11100 + & \rightarrow -1 \cdot 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} = -1 + 0,5 + 0,25 = -0,25 \\
 11001 & \rightarrow -1 \cdot 2^0 + 2^{-1} + 2^{-4} = -1 + 0,5 + 0,0625 = -0,4375 \\
 \hline
 110101 & & \\
 10101 & \rightarrow -1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-4} = -1 + 0,25 + 0,0625 = -0,6875
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} 11100 + \\ 11001 \\ 110101 \\ 10101 \end{array}} \right\} -0,6875$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{b) } 01011 \cdot & \rightarrow 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} = 0,5 + 0,125 + 0,0625 = 0,6875 \\
 0101 & \rightarrow 2^{-1} + 2^{-3} = 0,5 + 0,125 = 0,625 \\
 \hline
 00001011 & & \\
 001011 & & \\
 \hline
 00110111 & \rightarrow 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-7} = 0,25 + 0,125 + 0,03125 + \\
 & 0,015625 + 0,0078125 = 0,4296875
 \end{array}$$

În cazul codului C2, numărul pozitiv 00010110 este echivalent cu 010110, iar numărul negativ 11110010 este echivalent cu numărul 10010. Se observă că se pot ignora zerourile până la cel care precede un bit egal cu 1 pentru numerele pozitive (cele care au bitul de semn zero, deci încep cu un zero) și biții egali cu 1 până la cel care precede un bit egal cu zero în cazul numerelor negative (cele care au bitul de semn egal cu 1, deci încep cu 1).

Problema 1.5. Se consideră un convertor numeric – analogic (CNA) bipolar funcționând conform codului binar deplasat. Acestuia i se aplică eșantioanele cuantizate ale unei tensiuni sinusoidale de amplitudine aproximativ egală cu $V_{REF}/2$, unde V_{REF} este tensiunea de referință a convertorului. Dintr-o eroare, bitul 1 (corespunzător poziției 2^{-1}) este scurtcircuitat la masă. Să se deseneze forma de undă rezultată la ieșire.

Rezolvare:

Sistemul care funcționează corect (fără biți scurtcircuitați sau neconectați) conform descrierii de mai sus este reprezentat în schema din Fig. 1:

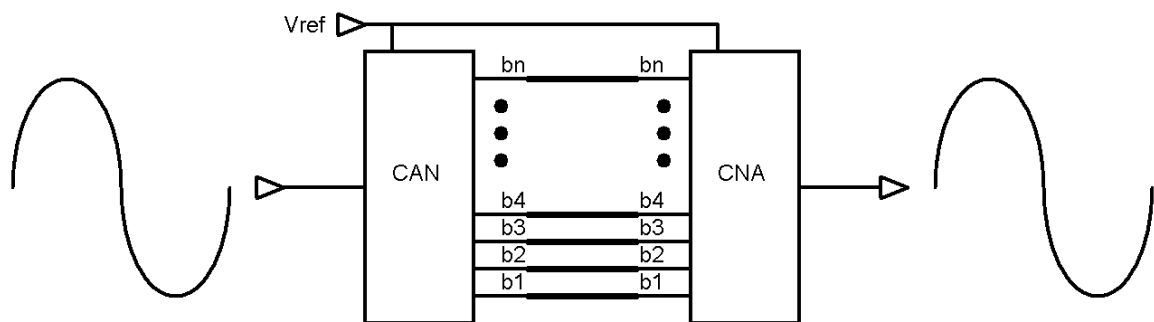


Fig. 1. Cascadarea corectă a unui CAN cu un CNA.

Semnalul analogic este aplicat unui CAN pentru a obține eșantioanele cuantizate ale acestuia. Aceste eșantioane sunt aplicate mai departe unui CNA pentru a reconstrui semnalul analogic. În cazul în care bitul 1 este scurtcircuitat la masă, valoarea acestuia va fi zero întotdeauna, conform schemei din Fig. 2:

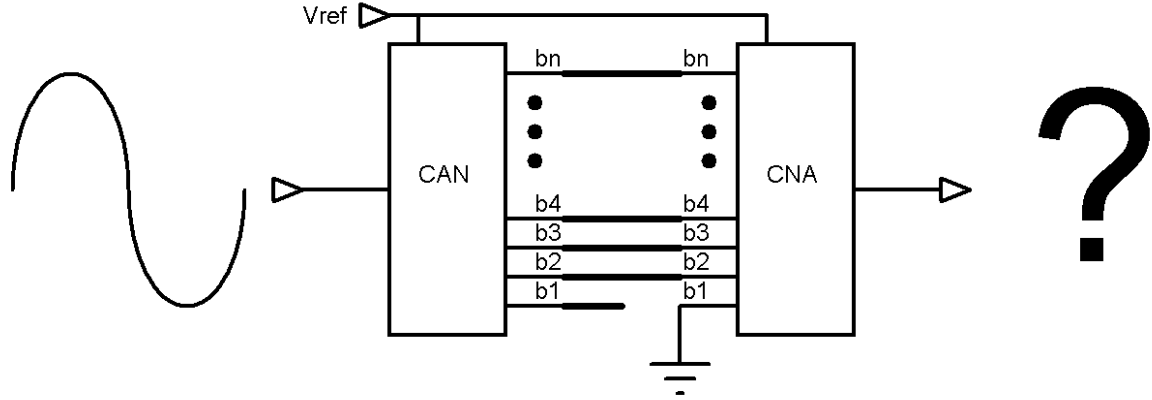


Fig. 2. Cascadarea unui CAN cu un CNA în condițiile din problemă.

Se pune problema cum va arăta forma de undă la ieșirea convertorului numeric – analogic dacă bitul b1 nu mai poate fi modificat.

Relația de conversie a unui CNA funcționând corect conform CBD este următoarea:

$$U_{corect} = V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n b_k \cdot 2^{-k} \right) \quad (6)$$

Pentru CNA-ul cu bitul b1 scurtcircuitat la masă ($b_1 = 0$) relația de conversie devine:

$$U = V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n b_k \cdot 2^{-k} \right) \quad (7)$$

Se cunoaște faptul că forma de undă de la ieșirea CNA-ului cu funcționare corectă va fi identică cu forma de undă de la intrarea CAN-ului, iar această formă de undă este dată în enunț. Din acest motiv se dorește exprimarea relației de conversie a convertorului defect în funcție de relația de conversie a convertorului cu funcționare corectă. Se prelucrează relația (7) astfel încât să conțină U_{corect} . Se observă că în relația (7) lipsește primul termen din suma din relația (6). Se adaugă și se scade acesta pentru a nu afecta relația și pentru a determina apariția lui U_{corect} în U .

$$\begin{aligned} U &= V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n b_k \cdot 2^{-k} \right) = V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + b_1 \cdot 2^{-1} - b_1 \cdot 2^{-1} + \sum_{k=2}^n b_k \cdot 2^{-k} \right) = \\ &= V_{REF} \left(-\frac{1}{2} - b_1 \cdot 2^{-1} + \sum_{k=1}^n b_k \cdot 2^{-k} \right) = U_{corect} - V_{REF} \cdot b_1 \cdot 2^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

Așadar se poate face următoarea discuție:

$$U = \begin{cases} U_{corect}, & \text{dacă } b_1 = 0 \\ U_{corect} - V_{REF}/2, & \text{dacă } b_1 = 1 \end{cases} \quad (9)$$

În acest moment s-a exprimat relația de conversie a convertorului defect în funcție de relația de conversie a convertorului cu funcționare corectă. Aceleași relații vor fi și între formele de undă de la ieșirile acestor convertoare. Cu alte cuvinte: forma de undă de la ieșirea convertorului defect va fi identică cu forma de undă de la ieșirea convertorului cu funcționarea corectă pentru valorile tensiunii ce determină bitul b1 să fie egal cu zero și va fi o variantă translatată grafic în jos cu $V_{REF}/2$ a formei de undă de la ieșirea convertorului cu funcționare corectă pentru valori ale tensiunii care determină bitul b1 să fie egal cu zero, așa cum rezultă din relația (9).

Este evident să se întâmple acest lucru. Dacă pentru o anumită tensiune aplicată la intrarea CAN-ului se obține la ieșirea sa un număr care are $b_1=0$, CNA-ul defect va funcționa corect deoarece

b1 fiind scurtcircuitat la masă, acesta va avea valoarea zero, deci exact valoarea care ar fi fost dată de CNA dacă legătura între biții b1 ai celor două convertoare nu era defectă. În acest caz numărul dat de CAN este egal cu numărul primit de CNA. În schimb, dacă CAN-ul primește la intrare o tensiune care ar determina bitul b1 să fie egal cu 1, atunci CNA-ul nu va mai funcționa corect deoarece bitul său b1 va fi egal cu zero (fiind scurtcircuitat la masă) și astfel va da la ieșire o tensiune diferită de cea aplicată CAN-ului deoarece cele două numere diferă.

Problema care se pune în continuare este următoarea: pentru ce valori ale tensiunii de intrare a CAN-ului, bitul b1 rezultat este egal cu 0, respectiv 1? Pentru a putea desena forma de undă de la ieșirea CNA-ului defect este nevoie de forma de undă de la ieșirea CNA-ului cu funcționare corectă partiționată astfel încât să se poată observa intervalele de tensiune pentru care b1=0, respectiv b1=1 pentru a determina care zone vor fi translate în jos cu $V_{REF}/2$ și care vor fi neafectate. Pentru a determina limitele intervalului de tensiune care determină b1=0 se procedează în felul următor:

- se impune în relația (6) b1=0 și toți ceilalți biți (b2 ... bn) egali tot cu 0 și se calculează U_{corect}

$$U_{corect}|_{b_1=0, b_k=0} = V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n 0 \cdot 2^{-k} \right) = -V_{REF}/2 \quad (10)$$

- se impune în relația (6) b1=0 și toți ceilalți biți (b2 ... bn) egali tot cu 1 și se calculează U_{corect}

$$U_{corect}|_{b_1=0, b_k=1} = V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n 1 \cdot 2^{-k} \right) = V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + 2^{-2} \frac{1-(2^{-1})^{n-1}}{1-2^{-1}} \right) \xrightarrow{n \text{ foarte mare}}$$

$$U_{corect}|_{b_1=0, b_k=1} = V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + 2^{-2} \frac{1-0}{1-2^{-1}} \right) \cong 0 \quad (11)$$

Se reamintește suma unei progresii geometrice cu n termeni și rația q:

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} b \cdot q^k = b \cdot q^m \frac{1-q^{[(m+n-1)-m]+1}}{1-q} \quad (12)$$

În relația (11) U_{corect} tinde către zero când n tinde către infinit, deci nu se poate pune semnul egalității între U_{corect} și zero în acest caz.

În relațiile (10) și (11) s-au determinat limitele intervalului de tensiune pentru care b1=0 și anume $[-V_{REF}/2, 0)$. Se vor calcula în continuare în mod similar limitele intervalului de tensiune pentru care b1=1:

- se impune în relația (6) b1=1 și toți ceilalți biți (b2 ... bn) egali tot cu 0 și se calculează U_{corect}

$$U_{corect}|_{b_1=1, b_k=0} = V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + 1 \cdot 2^{-1} + \sum_{k=2}^n 0 \cdot 2^{-k} \right) = 0 \quad (13)$$

- se impune în relația (6) b1=1 și toți ceilalți biți (b2 ... bn) egali tot cu 1 și se calculează U_{corect}

$$U_{corect}|_{b_1=1, b_k=1} = V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n 1 \cdot 2^{-k} \right) = V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + 2^{-1} \frac{1-(2^{-1})^n}{1-2^{-1}} \right) \xrightarrow{n \text{ foarte mare}}$$

$$U_{corect}|_{b_1=1, b_k=1} \cong V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + 2^{-1} \frac{1-0}{1-2^{-1}} \right) \cong V_{REF}/2 \quad (14)$$

Așadar limitele intervalului de tensiune pentru care b1=1 sunt $[0, V_{REF}/2)$.

Pentru a sintetiza, cele determinate mai sus se pot scrie sub formă tabelată:

b_1	$b_{k,k>1}$	U_{corect}
0	0	$-V_{REF}/2$
0	1	$\cong 0$
1	0	0
1	1	$\cong V_{REF}/2$

Tabelul 1. Limitele intervalelor de tensiune de interes.

Se reamintește că în cazul convertorului cu funcționare normală forma de undă de la ieșirea CNA-ului va fi identică cu cea de la intrarea CAN-ului care este cunoscută (dată în enunț) denumită mai departe „corectă”. Forma de undă de la ieșirea CNA-ului defect se obține prelucrând folosind relația (9) forma de undă corectă partiționată corespunzător.

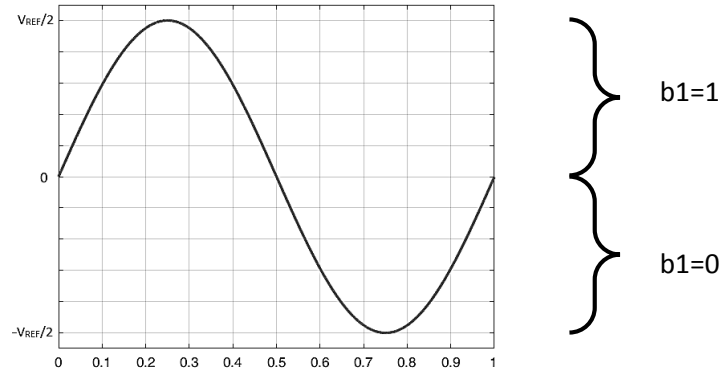


Fig. 3. Forma de undă partiționată de la ieșirea CNA-ului cu funcționare corectă (dată în enunț, U_{corect}).

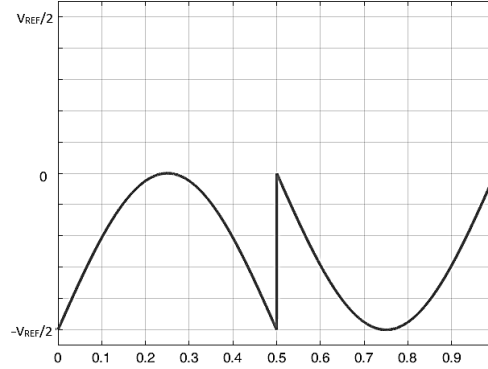


Fig. 4. Forma de undă de la ieșirea CNA-ului cu bitul b1 scurtcircuitat la masă.

Se observă că pentru zona în care $b1=0$ cele două forme de undă sunt identice (zona rămâne nedeplasată), iar zona caracterizată de $b1=1$ a fost translatată în jos cu $V_{REF}/2$, conform relației (9).

În reprezentările de mai sus s-a folosit o perioadă dintr-un semnal cu frecvența de 1Hz. S-au folosit acești parametri pentru a facilita scrierea și nu sunt importanți deoarece nu s-a impus frecvența semnalului și nici nu intervine în rezolvarea problemei.

Problema 1.6. Se consideră un convertor numeric – analogic (CNA) bipolar care lucrează în cod binar deplasat (CBD). Pe intrările de date se aplică eșantioanele unui semnal sinusoidal de amplitudine $V_{REF}/2$. Se cere să se deducă forma de undă la ieșirea convertorului dacă bitul cel mai semnificativ al convertorului numeric – analogic este ținut forțat la „1” logic.

Rezolvare:

Etapele de rezolvare a acestei probleme sunt aceleași cu cele din problema 1.5. Situația este foarte asemănătoare, singura deosebire fiind faptul că bitul b_1 al CNA-ului este conectat permanent la „1” logic (în general la o linie prin care se furnizează tensiunea de alimentare a convertorului).

Relația de conversie a unui CNA funcționând conform CBD (U_{corect}) este relația (6). În cazul defectului impus în enunț aceasta devine:

$$U = V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + 1 \cdot 2^{-1} + \sum_{k=2}^n b_k \cdot 2^{-k} \right) \quad (15)$$

Pentru a obține U_{corect} în U , în relația (15) trebuie adăugat și scăzut termenul $b_1 \cdot 2^{-1}$.

$$\begin{aligned} U &= V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + 1 \cdot 2^{-1} + b_1 \cdot 2^{-1} - b_1 \cdot 2^{-1} + \sum_{k=2}^n b_k \cdot 2^{-k} \right) = \\ U &= V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n b_k \cdot 2^{-k} + 1 \cdot 2^{-1} - b_1 \cdot 2^{-1} \right) = \\ U &= U_{corect} + \frac{V_{REF}}{2} (1 - b_1) \end{aligned} \quad (16)$$

Așadar se poate face următoarea discuție:

$$U = \begin{cases} U_{corect} + \frac{V_{REF}}{2}, & b_1 = 0 \\ U_{corect}, & b_1 = 1 \end{cases} \quad (17)$$

Se determină limitele intervalelor de tensiune ce determină bitul b_1 să ia valoarea zero, respectiv 1, așa cum s-a arătat la problema 1.5. Fiind același cod și pentru că se tratează același bit rezultă:

b_1	$b_{k,k>1}$	U_{corect}
0	0	$-V_{REF}/2$
0	1	$\cong 0$
1	0	0
1	1	$\cong V_{REF}/2$

Tabelul 2. Limitele intervalelor de tensiune de interes.

În reprezentările de mai jos s-a folosit o perioadă dintr-un semnal cu frecvența de 1Hz. S-au folosit acești parametri pentru a facilita scrierea și nu sunt importanți deoarece nu s-a impus frecvența semnalului și nici nu intervine în rezolvarea problemei.

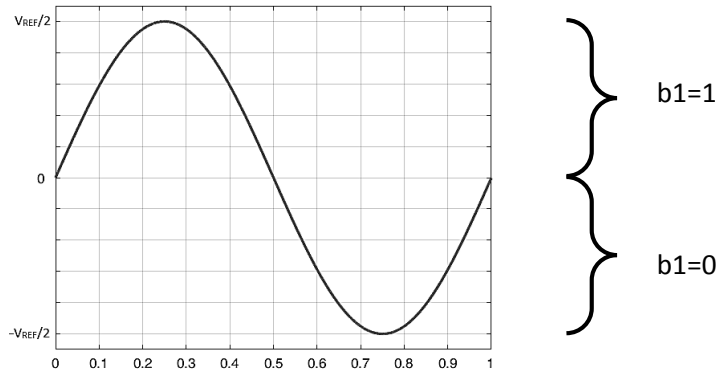


Fig. 5. Forma de undă partiționată de la ieșirea CNA-ului cu funcționare corectă (dată în enunț, U_{corect}).

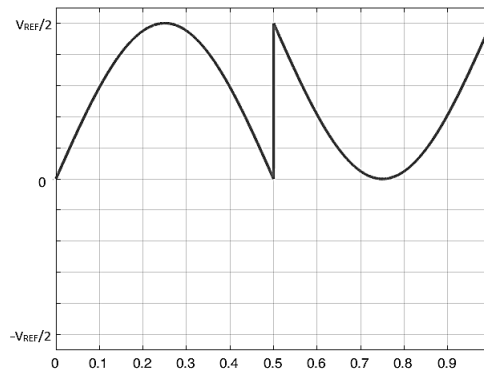


Fig. 6. Forma de undă de la ieșirea CNA-ului cu bitul b_1 forțat „1” logic.

Se observă că pentru zona în care $b_1=1$ cele două forme de undă sunt identice (zona rămâne nedeplasată), iar zona caracterizată de $b_1=0$ a fost translatată în sus cu $V_{REF}/2$, conform relației (17).

Problema 1.7. Se consideră un convertor numeric – analogic (CNA) bipolar funcționând conform codului complement față de 2 (C2). Aceștia i se aplică eșantioanele cuantizate ale unei tensiuni sinusoidale cu amplitudinea aproximativ egală cu $V_{REF}/2$, unde V_{REF} este tensiunea de referință a convertorului. Dintr-o eroare, bitul b_2 este ținut forțat la „1” logic. Desenați forma de undă rezultată la ieșire.

Rezolvare:

Etapele de rezolvare a acestei probleme sunt aceleași cu cele din problema 1.5. Situația este foarte asemănătoare, deosebiri fiind codul folosit (C2 față de CBD) și faptul că bitul b_2 al CNA-ului este conectat permanent la „1” logic (în general la o linie prin care se furnizează tensiunea de alimentare a convertorului).

Relația de conversie a unui CNA funcționând conform C2 (U_{corect}) este relația (5). În cazul defectului impus în enunț aceasta devine:

$$U = V_{REF} \left(-\frac{b_1}{2} + 1 \cdot 2^{-2} + \sum_{k=3}^n b_k \cdot 2^{-k} \right) \quad (18)$$

Pentru a obține U_{corect} în U , în relația (18) trebuie adăugat și scăzut termenul $b_2 \cdot 2^{-2}$.

$$U = V_{REF} \left(-\frac{b_1}{2} + 1 \cdot 2^{-2} + b_2 \cdot 2^{-2} - b_2 \cdot 2^{-2} + \sum_{k=3}^n b_k \cdot 2^{-k} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= V_{REF} \left(-\frac{b_1}{2} + \sum_{k=2}^n b_k \cdot 2^{-k} + 1 \cdot 2^{-2} - b_2 \cdot 2^{-2} \right) = \\
&= U_{corect} + \frac{V_{REF}}{4} (1 - b_2)
\end{aligned} \tag{19}$$

Așadar se poate face următoarea discuție:

$$U = \begin{cases} U_{corect} + \frac{V_{REF}}{4}, & b_2 = 0 \\ U_{corect}, & b_2 = 1 \end{cases} \tag{20}$$

Se determină limitele intervalelor de tensiune ce determină bitul b_2 să ia valoarea zero, respectiv 1, așa cum s-a arătat la problema 1.5. Bitul afectat fiind bitul 2, vor exista mai multe situații de tratat decât în cazul problemei 1.5. în care erau numai 4. Exemplu pentru primele două cazuri:

- se impune în relația (5) $b_1=0$, $b_2=0$ și toți ceilalți biți ($b_3 \dots b_n$) egali tot cu 0 și se calculează U_{corect}

$$U_{corect} |_{b_1=0, b_2=0, b_k=0} = V_{REF} \left(-\frac{0}{2} + \sum_{k=2}^n 0 \cdot 2^{-k} \right) = 0 \tag{21}$$

- se impune în relația (5) $b_1=0$, $b_2=0$ și toți ceilalți biți ($b_3 \dots b_n$) egali cu 1 și se calculează U_{corect}

$$U_{corect} |_{b_1=0, b_2=0, b_k=1} = V_{REF} \left(-\frac{0}{2} + 0 \cdot 2^{-2} + \sum_{k=3}^n 1 \cdot 2^{-k} \right) = V_{REF} \cdot 2^{-3} \frac{1-(2^{-1})^{n-2}}{1-2^{-1}} \xrightarrow{n \text{ foarte mare}}$$

$$U_{corect} |_{b_1=0, b_2=0, b_k=1} \cong V_{REF} \cdot 1 \cdot 2^{-3} \frac{1-0}{1-2^{-1}} \cong \frac{V_{REF}}{4} \tag{22}$$

Se calculează similar pentru toate celelalte cazuri și se determină:

b_1	b_2	$b_{k,k>2}$	U_{corect}
0	0	0	0
0	0	1	$\cong V_{REF}/4$
0	1	0	$V_{REF}/4$
0	1	1	$\cong V_{REF}/2$
1	0	0	$-V_{REF}/2$
1	0	1	$\cong -V_{REF}/4$
1	1	0	$-V_{REF}/4$
1	1	1	$\cong 0$

Tabelul 3. Limitele intervalelor de tensiune de interes.

Se observă că există două intervale în care $b_2=0$ și anume $[0, V_{REF}/4)$ respectiv $[-V_{REF}/2, -V_{REF}/4)$. Similar se întâmplă și pentru $b_2=1$. În reprezentările de mai jos s-a folosit o perioadă dintr-un semnal cu frecvența de 1Hz. S-au folosit acești parametri pentru a facilita scrierea și nu sunt importanți deoarece nu s-a impus frecvența semnalului și nici nu intervine în rezolvarea problemei.

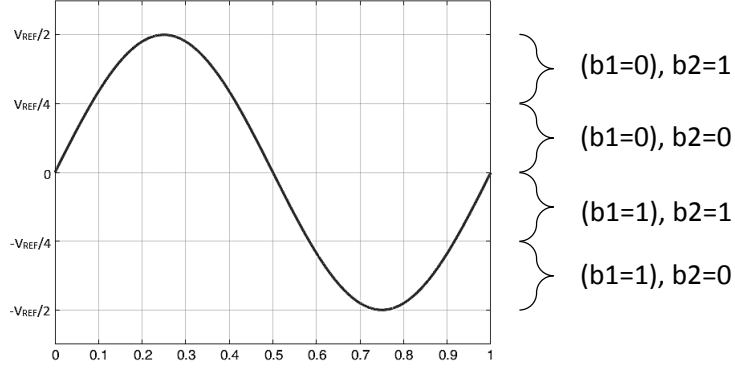


Fig. 7. Forma de undă partiționată de la ieșirea CNA-ului cu funcționare corectă (dată în enunț, U_{corect}).

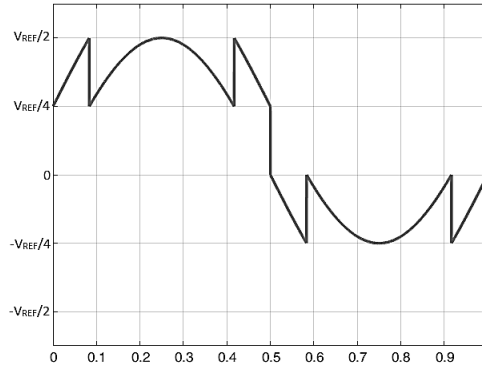


Fig. 8. Forma de undă de la ieșirea CNA-ului cu bitul b1 forțat „1” logic.

Se observă că pentru zonele în care $b_2=1$ cele două forme de undă sunt identice (zonele rămân nedeplasate), iar zonele caracterizate de $b_2=0$ au fost translatată în sus cu $V_{REF}/4$, conform relației (20).

Problema 1.8. Se consideră un convertor numeric – analogic (CNA) bipolar funcționând conform codului complement față de 2 (C2). Aceștia i se aplică eşantioanele cuantizate ale unei tensiuni sinusoidale cu amplitudinea aproximativ egală cu $V_{REF}/2$, unde V_{REF} este tensiunea de referință a convertorului. Dintr-o eroare, bitul b_2 este ținut forțat la masă. Desenați forma de undă rezultată la ieșire.

Rezolvare:

Etapele de rezolvare a acestei probleme sunt aceleași cu cele din problema 1.7. Situația este foarte asemănătoare, deosebirea fiind faptul că bitul b_2 al CNA-ului este conectat permanent la „0” logic (la masă).

Relația de conversie a unui CNA funcționând conform C2 (U_{corect}) este relația (5). În cazul defectului impus în enunț aceasta devine:

$$U = V_{REF} \left(-\frac{b_1}{2} + \sum_{k=3}^n b_k \cdot 2^{-k} \right) \quad (23)$$

Pentru a obține U_{corect} în U , în relația (23) trebuie adăugat și scăzut termenul $b_2 \cdot 2^{-2}$. Rezultă relația de conversie:

$$U = U_{corect} - b_2 \frac{V_{REF}}{4} \quad (24)$$

Așadar se poate face următoarea discuție:

$$U = \begin{cases} U_{corect}, & b_2 = 0 \\ U_{corect} - \frac{V_{REF}}{4}, & b_2 = 1 \end{cases} \quad (25)$$

Se determină limitele intervalelor de tensiune ce determină bitul b_2 să ia valoarea zero, respectiv 1, așa cum s-a arătat la problema 1.7.

b_1	b_2	$b_{k,k>2}$	U_{corect}
0	0	0	0
0	0	1	$\cong V_{REF}/4$
0	1	0	$V_{REF}/4$
0	1	1	$\cong V_{REF}/2$
1	0	0	$-V_{REF}/2$
1	0	1	$\cong -V_{REF}/4$
1	1	0	$-V_{REF}/4$
1	1	1	$\cong 0$

Tabelul 4. Limitele intervalelor de tensiune de interes.

Se observă că există două intervale în care $b_2=0$ și anume $[0, V_{REF}/4)$ respectiv $[-V_{REF}/2, -V_{REF}/4)$. Similar se întâmplă și pentru $b_2=1$. În reprezentările de mai jos s-a folosit o perioadă dintr-un semnal cu frecvența de 1Hz. S-au folosit acești parametri pentru a facilita scrierea și nu sunt importanți deoarece nu s-a impus frecvența semnalului și nici nu intervine în rezolvarea problemei.

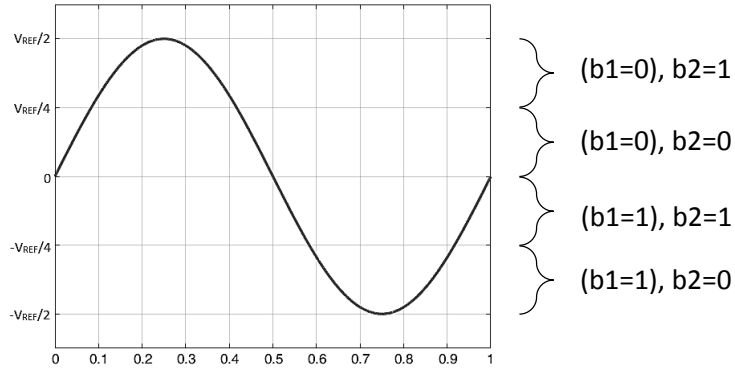


Fig. 9. Forma de undă partiționată de la ieșirea CNA-ului cu funcționare corectă (dată în enunț, U_{corect}).

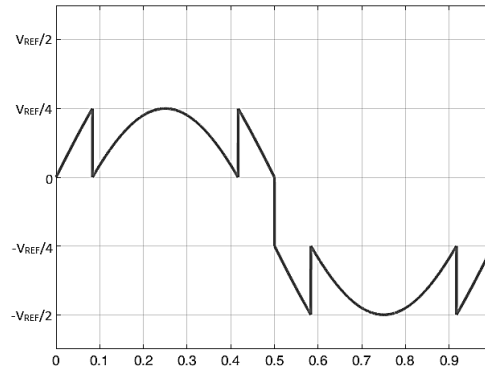


Fig. 10. Forma de undă de la ieșirea CNA-ului cu bitul b_1 forțat „0” logic.

Se observă că pentru zonele în care $b_2=0$ cele două forme de undă sunt identice (zonele rămân nedeplasate), iar zonele caracterizate de $b_2=1$ au fost translatată în jos cu $V_{REF}/4$, conform relației (25).

Problema 1.9. Se consideră un convertor numeric – analogic (CNA) bipolar funcționând conform codului complement față de 2 (C2). Aceștia i se aplică eșantioanele cuantizate ale unei tensiuni sinusoidale cu amplitudinea aproximativ egală cu $V_{REF}/2$, unde V_{REF} este tensiunea de referință a convertorului. Dintr-o eroare, bitul cel mai semnificativ este ținut forțat la „1” logic. Desenați forma de undă rezultată la ieșire.

Rezolvare:

Etapele de rezolvare a acestei probleme sunt aceleași cu cele din problema 1.8. Situația este foarte asemănătoare, deosebirea fiind faptul că bitul b_1 al CNA-ului este conectat permanent la „1” logic (în general la o linie prin care se furnizează tensiunea de alimentare a convertorului).

Relația de conversie a unui CNA funcționând conform C2 (U_{corect}) este relația (5). În cazul defectului impus în enunț aceasta devine:

$$U = V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n b_k \cdot 2^{-k} \right) \quad (26)$$

Pentru a obține U_{corect} în U , în relația (26) trebuie adăugat și scăzut termenul $-\frac{b_1}{2}$. Rezultă relația de conversie:

$$U = U_{corect} + \frac{V_{REF}}{2} (b_1 - 1) \quad (27)$$

Așadar se poate face următoarea discuție:

$$U = \begin{cases} U_{corect}, & b_1 = 1 \\ U_{corect} - \frac{V_{REF}}{2}, & b_1 = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Se determină limitele intervalelor de tensiune ce determină bitul b_1 să ia valoarea zero, respectiv 1, așa cum s-a arătat la problema 1.5.

b_1	$b_{k,k>1}$	U_{corect}
0	0	0
0	1	$\cong V_{REF}/2$
1	0	$-V_{REF}/2$
1	1	$\cong 0$

Tabelul 5. Limitele intervalelor de tensiune de interes.

În reprezentările de mai jos s-a folosit o perioadă dintr-un semnal cu frecvența de 1Hz. S-au folosit acești parametri pentru a facilita scrierea și nu sunt importanți deoarece nu s-a impus frecvența semnalului și nici nu intervine în rezolvarea problemei.

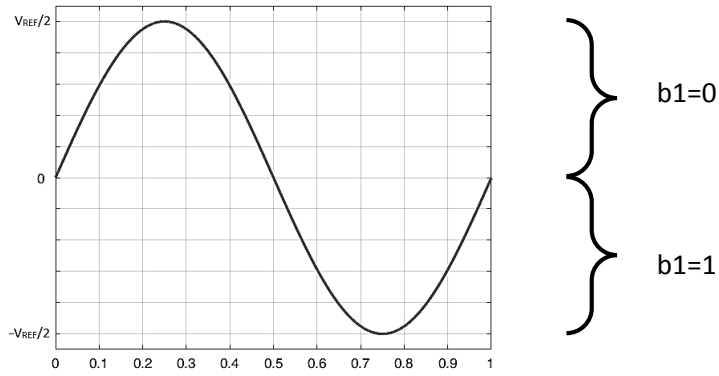


Fig. 11. Forma de undă partiționată de la ieșirea CNA-ului cu funcționare corectă (dată în enunț, U_{corect}).

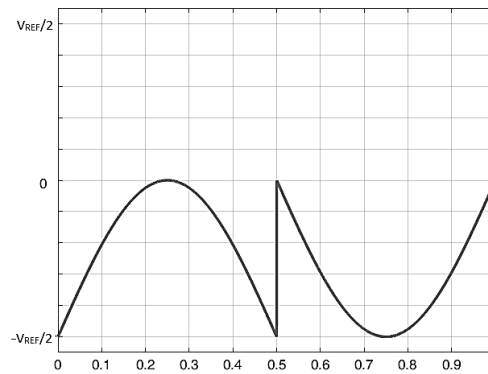


Fig. 12. Forma de undă de la ieșirea CNA-ului cu bitul b_1 forțat „1” logic.

Se observă că pentru zona în care $b_1=1$ cele două forme de undă sunt identice (zona rămâne nedeplasată), iar zona caracterizată de $b_1=0$ a fost traslatată în jos cu $V_{REF}/2$, conform relației (28).

Problema 1.10. Se consideră un convertor numeric – analogic (CNA) bipolar funcționând conform codului complement față de 2 (C2). Aceștia i se aplică eșantioanele cuantizate ale unei tensiuni sinusoidale cu amplitudinea aproximativ egală cu $V_{REF}/2$, unde V_{REF} este tensiunea de referință a convertorului. Dintr-o eroare, bitul cel mai semnificativ este ținut forțat la masă. Desenați forma de undă rezultată la ieșire.

Rezolvare:

Etapele de rezolvare a acestei probleme sunt aceleași cu cele din problema 1.9. Situația este foarte asemănătoare, deosebirea fiind faptul că bitul b_1 al CNA-ului este conectat permanent la „0” logic (la masă).

Relația de conversie a unui CNA funcționând conform C2 (U_{corect}) este relația (5). În cazul defectului impus în enunț aceasta devine:

$$U = V_{REF} \left(-\frac{0}{2} + \sum_{k=2}^n b_k \cdot 2^{-k} \right) \quad (29)$$

Pentru a obține U_{corect} în U , în relația (29) trebuie adăugat și scăzut termenul $-\frac{b_1}{2}$. Rezultă relația de conversie:

$$U = U_{corect} + b_1 \frac{V_{REF}}{2} \quad (30)$$

Așadar se poate face următoarea discuție:

$$U = \begin{cases} U_{corect} + \frac{V_{REF}}{2}, & b_1 = 1 \\ U_{corect}, & b_1 = 0 \end{cases} \quad (31)$$

Se determină limitele intervalelor de tensiune ce determină bitul b_1 să ia valoarea zero, respectiv 1, așa cum s-a arătat la problema 1.5.

b_1	$b_{k,k>1}$	U_{corect}
0	0	0
0	1	$\cong V_{REF}/2$
1	0	$-V_{REF}/2$
1	1	$\cong 0$

Tabelul 6. Limitele intervalelor de tensiune de interes.

În reprezentările de mai jos s-a folosit o perioadă dintr-un semnal cu frecvența de 1Hz. S-au folosit acești parametri pentru a facilita scrierea și nu sunt importanți deoarece nu s-a impus frecvența semnalului și nici nu intervine în rezolvarea problemei.

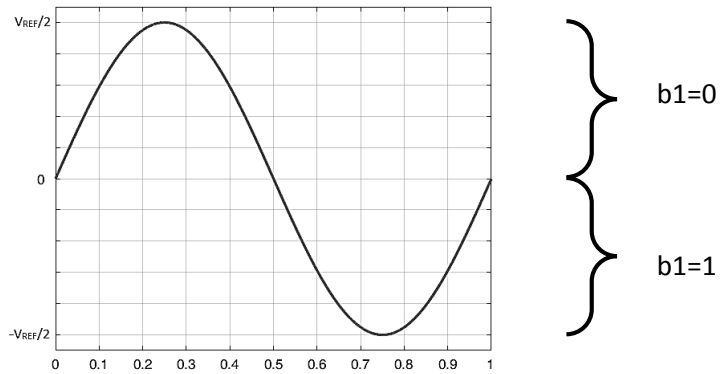


Fig. 13. Forma de undă partiționată de la ieșirea CNA-ului cu funcționare corectă (dată în enunț, U_{corect}).

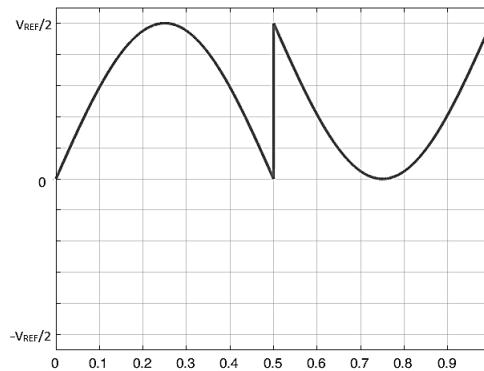


Fig. 14. Forma de undă de la ieșirea CNA-ului cu bitul b_1 forțat la masă.

Se observă că pentru zona în care $b_1=0$ cele două forme de undă sunt identice (zona rămâne nedeplasată), iar zona caracterizată de $b_1=1$ a fost translatată în sus cu $V_{REF}/2$, conform relației (31).

Problema 1.11. Se consideră un convertor numeric – analogic (CNA) bipolar care lucrează în cod binar deplasat (CBD). Pe intrările de date se aplică eșantioanele unui semnal sinusoidal de amplitudine $V_{REF}/2$. Se cere să se deducă forma de undă la ieșirea convertorului dacă bitul b_2 este ținut forțat la „1” logic.

Rezolvare:

Etapele de rezolvare a acestei probleme sunt aceleași cu cele din problema 1.5. Situația este foarte asemănătoare, deosebirea fiind faptul că bitul b_2 al CNA-ului este conectat permanent la „1” logic (în general la o linie prin care se furnizează tensiunea de alimentare a convertorului).

Relația de conversie a unui CNA funcționând conform CBD (U_{corect}) este relația (6). În cazul defectului impus în enunț aceasta devine:

$$U = V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + b_1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + \sum_{k=3}^n b_k \cdot 2^{-k} \right) \quad (32)$$

Pentru a obține U_{corect} în U , în relația (32) trebuie adăugat și scăzut termenul $b_2 \cdot 2^{-2}$. Rezultă relația de conversie:

$$U = U_{corect} + (1 - b_2) \frac{V_{REF}}{4} \quad (33)$$

Așadar se poate face următoarea discuție:

$$U = \begin{cases} U_{corect} + \frac{V_{REF}}{4}, & b_2 = 0 \\ U_{corect}, & b_2 = 1 \end{cases} \quad (34)$$

Se determină limitele intervalelor de tensiune ce determină bitul b_2 să ia valoarea zero, respectiv 1, așa cum s-a arătat la problema 1.7.

b_1	b_2	$b_{k,k>2}$	U_{corect}
0	0	0	$-V_{REF}/2$
0	0	1	$\cong -V_{REF}/4$
0	1	0	$-V_{REF}/4$
0	1	1	$\cong 0$
1	0	0	0
1	0	1	$\cong V_{REF}/4$
1	1	0	$V_{REF}/4$
1	1	1	$\cong V_{REF}/2$

Tabelul 7. Limitele intervalelor de tensiune de interes.

Se observă că există două intervale în care $b_2=0$ și anume $[-V_{REF}/2, -V_{REF}/4)$ respectiv $[0, V_{REF}/4)$. Similar se întâmplă și pentru $b_2=1$. În reprezentările de mai jos s-a folosit o perioadă dintr-un semnal cu frecvența de 1Hz. S-au folosit acești parametri pentru a facilita scrierea și nu sunt importanți deoarece nu s-a impus frecvența semnalului și nici nu intervine în rezolvarea problemei.

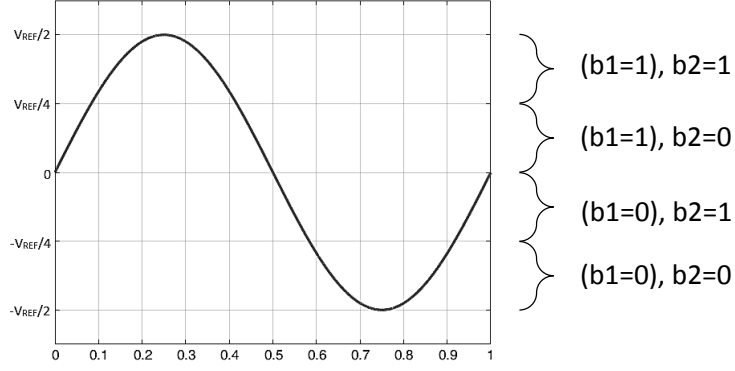


Fig. 15. Forma de undă partiționată de la ieșirea CNA-ului cu funcționare corectă (dată în enunț, U_{corect}).

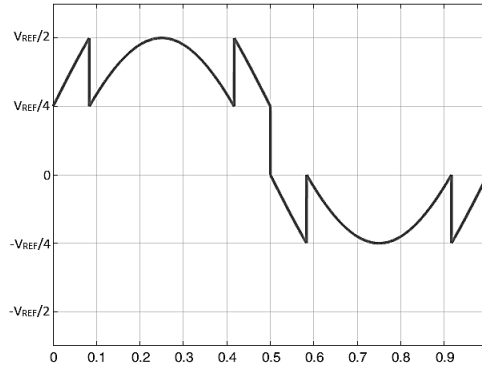


Fig. 16. Forma de undă de la ieșirea CNA-ului cu bitul b1 forțat „1” logic.

Se observă că zonele în care $b_2=1$ rămân nedeplasate, iar zonele caracterizate de $b_2=0$ au fost translate în sus cu $V_{REF}/4$, conform relației (34).

Problema 1.12. Se consideră un convertor numeric – analogic (CNA) bipolar care lucrează în cod binar deplasat (CBD). Pe intrările de date se aplică eșantioanele unui semnal sinusoidal de amplitudine $V_{REF}/2$. Se cere să se deducă forma de undă la ieșirea convertorului dacă bitul b_2 este ținut forțat la masă.

Rezolvare:

Etapele de rezolvare a acestei probleme sunt aceleași cu cele din problema 1.5. Situația este foarte asemănătoare, deosebirea fiind faptul că bitul b_2 al CNA-ului este conectat permanent la „0” logic (la masă).

Relația de conversie a unui CNA funcționând conform CBD (U_{corect}) este relația (6). În cazul defectului impus în enunț aceasta devine:

$$U = V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + b_1 \cdot 2^{-1} + \sum_{k=3}^n b_k \cdot 2^{-k} \right) \quad (35)$$

Pentru a obține U_{corect} în U , în relația (32) trebuie adăugat și scăzut termenul $b_2 \cdot 2^{-2}$. Rezultă relația de conversie:

$$U = U_{corect} - b_2 \frac{V_{REF}}{4} \quad (36)$$

Așadar se poate face următoarea discuție:

$$U = \begin{cases} U_{corect} - \frac{V_{REF}}{4}, & b_2 = 1 \\ U_{corect}, & b_2 = 0 \end{cases} \quad (37)$$

Se determină limitele intervalelor de tensiune ce determină bitul b_2 să ia valoarea zero, respectiv 1, așa cum s-a arătat la problema 1.7.

b_1	b_2	$b_{k,k>2}$	U_{corect}
0	0	0	$-V_{REF}/2$
0	0	1	$\cong -V_{REF}/4$
0	1	0	$-V_{REF}/4$
0	1	1	$\cong 0$
1	0	0	0
1	0	1	$\cong V_{REF}/4$
1	1	0	$V_{REF}/4$
1	1	1	$\cong V_{REF}/2$

Tabelul 8. Limitele intervalelor de tensiune de interes.

Se observă că există două intervale în care $b_2=0$ și anume $[-V_{REF}/2, -V_{REF}/4)$ respectiv $[0, V_{REF}/4)$. Similar se întâmplă și pentru $b_2=1$. În reprezentările de mai jos s-a folosit o perioadă dintr-un semnal cu frecvența de 1Hz. S-au folosit acești parametri pentru a facilita scrierea și nu sunt importanți deoarece nu s-a impus frecvența semnalului și nici nu intervine în rezolvarea problemei.

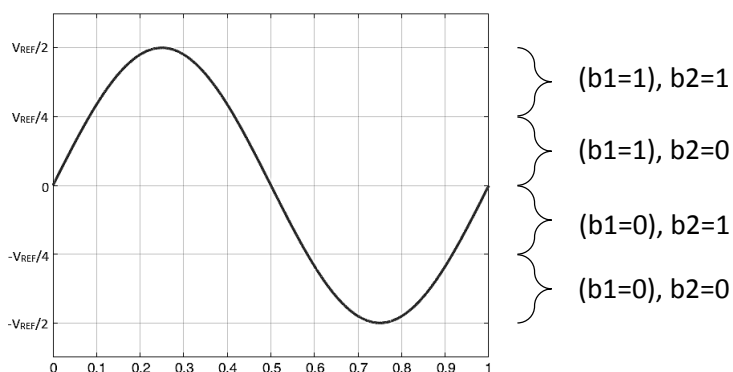


Fig. 17. Forma de undă partizionată de la ieșirea CNA-ului cu funcționare corectă (dată în enunț, U_{corect}).

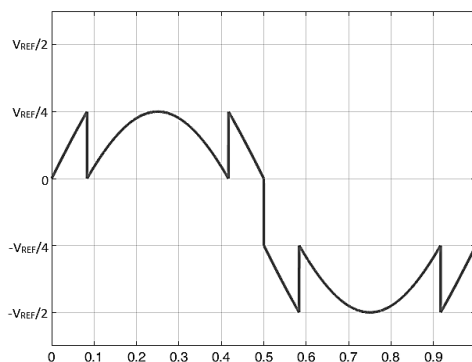


Fig. 18. Forma de undă de la ieșirea CNA-ului cu bitul b_1 forțat „0” logic.

Se observă că pentru zonele în care $b_2=0$ cele două forme de undă sunt identice (rămân nedepasate), iar zonele caracterizate de $b_2=1$ au fost translatate în jos cu $V_{REF}/4$, conform relației (37).

Problema 1.13. În scopul realizării unei înmulțiri cu 2, biții eșantioanelor corespunzătoare unui semnal sinusoidal, cu amplitudinea de aproximativ $V_{REF}/2$, unde V_{REF} este tensiunea de referință a unui convertor numeric – analogic, sunt deplasați spre stânga cu o poziție, fără a alocă biți suplimentari, și aplicați convertorului. Să se reprezinte semnalul de la ieșirea convertorului numeric – analogic, dacă se lucrează în cod binar deplasat (CBD). Cum se modifică rezoluția convertorului după efectuarea deplasării spre stânga a biților?

Rezolvare:

Sistemul care funcționează conform descrierii de mai sus este reprezentat în schema de mai jos:

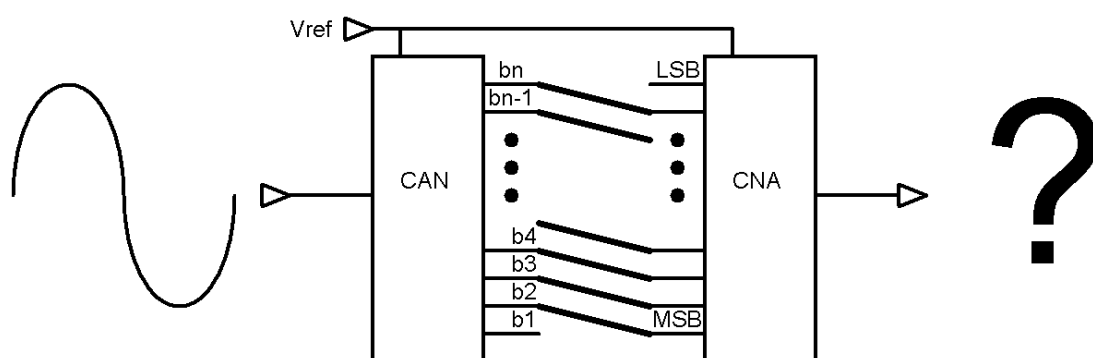


Fig. 19. Cascadarea unui CAN cu un CNA pentru a obține înmulțirea cu 2.

Așa cum se poate observa din relațiile de conversie ale CNA-urilor întâlnite mai sus (vezi relațiile (3),(4),(5)), fiecare bit comandă sumarea sau nu a unei anumite cantități numită în continuare „contribuție” a respectivului bit. De exemplu, contribuția bitului b_2 în cazul unui CNA funcționând conform CBD este 2^{-2} . Deoarece valoarea bitului înmulțește contribuția, aceasta se poate numi „pondere”. Așadar b_2 va fi pondere pentru contribuția 2^{-2} în exemplul de mai sus. Aceste contribuții sumate capătă, în final, semnificație fizică (de obicei tensiune) prin înmulțirea cu tensiunea de referință în cazurile prezentate, dar se pot converti și la curent sau alte mărimi fizice, în general.

Uzual legăturile dintre un CAN și un CNA se fac între ieșiri și intrări corespunzătoare unor biți de contribuții egale, așa cum s-a întâmplat în cazul problemelor anterioare (vezi scheme problema 1.5). Se cunoaște faptul că, în baza 2, o înmulțire cu 2 este echivalentă cu deplasarea către stânga cu o poziție a tuturor biților cu ajutorul cărora se scrie numărul respectiv. De exemplu numărul $100101|_B$ înmulțit cu 2 va avea ca rezultat numărul $1001010|_B$. Așadar este evident că rezultatul înmulțirii cu 2 a unui număr binar reprezentat pe n biți va avea nevoie de $n+1$ biți pentru reprezentare corectă. În practică efectul înmulțirii cu 2 este ușor de obținut numai prin modificarea corespunzătoare a legăturilor dintre dispozitivele electronice aplicate (în cazul de față CAN și CNA) în felul arătat în figura de mai sus. În situația de față înmulțirea se face fără alocarea bitului suplimentar (evident, deoarece CNA-ul nu are o intrare în plus) pentru a studia efectele. Rezultă următoarele:

Intrări CNA	MSB					LSB
Contribuție	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	...	2^{-n+1}	2^{-n}
Ponderi legătură normală	b_1	b_2	b_3	...	b_{n-1}	b_n
Ponderi legătură pentru înmulțire cu 2	b_2	b_3	b_4	...	b_n	0

Tabelul 9. Consecințele legăturii din Fig. 19.

Relația de conversie a unui CNA funcționând conform CBD (U_{corect}) este relația (6). În cazul legăturilor pentru înmulțire din cazul de față b_2 va înmulți 2^{-1} , b_3 va înmulți 2^{-2} și așa mai departe, cum se poate observa în tabelul de mai sus. Observând noile constrângeri, relația de conversie va deveni:

$$U = V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n b_k \cdot 2^{-k+1} \right) \quad (38)$$

Pentru a obține U_{corect} în U , (în relația (38)) se urmăresc pașii de mai jos:

$$\begin{aligned}
 U &= V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n b_k \cdot 2^{-k+1} \right) = V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n b_k \cdot 2^{-k} \cdot 2 \right) \\
 &= V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n b_k \cdot 2^{-k} \cdot 2 + 2b_1 \cdot 2^{-1} - 2b_1 \cdot 2^{-1} \right) \\
 &= V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k \cdot 2^{-k} - 2b_1 \cdot 2^{-1} \right) = V_{REF} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k \cdot 2^{-k} - 2b_1 \cdot 2^{-1} \right) \\
 &= V_{REF} \left(-1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k \cdot 2^{-k} + \frac{1}{2} - 2b_1 \cdot 2^{-1} \right) = V_{REF} (-1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k \cdot 2^{-k}) + V_{REF} \left(\frac{1}{2} - 2b_1 \cdot 2^{-1} \right) \\
 &= 2 \cdot U_{corect} + V_{REF} \left(\frac{1-2b_1}{2} \right) \quad (39)
 \end{aligned}$$

Așadar se poate face următoarea discuție:

$$U = \begin{cases} 2 \cdot U_{corect} + \frac{V_{REF}}{2}, & b_1 = 0 \\ 2 \cdot U_{corect} - \frac{V_{REF}}{2}, & b_1 = 1 \end{cases} \quad (40)$$

Se determină limitele intervalelor de tensiune ce determină bitul b_1 să ia valoarea zero, respectiv 1, așa cum s-a arătat la problema 1.5.

b_1	$b_{k,k>1}$	U_{corect}
0	0	$-V_{REF}/2$
0	1	$\cong 0$
1	0	0
1	1	$\cong V_{REF}/2$

Tabelul 10. Limitele intervalelor de tensiune de interes.

În reprezentările de mai jos s-a folosit o perioadă dintr-un semnal cu frecvența de 1Hz. S-au folosit acești parametri pentru a facilita scrierea și nu sunt importanți deoarece nu s-a impus frecvența semnalului și nici nu intervine în rezolvarea problemei.

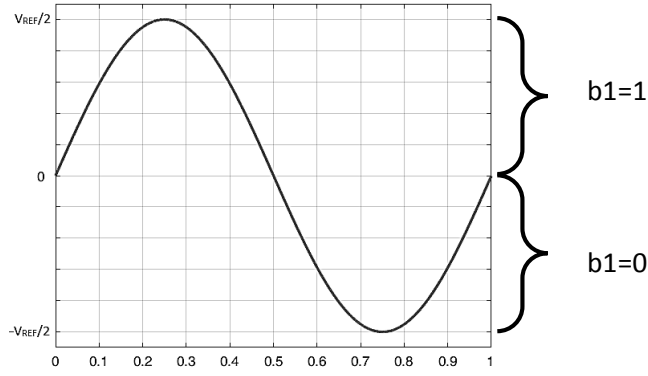


Fig. 20. Forma de undă partiționată de la ieșirea CNA-ului cu funcționare corectă (dată în enunț, U_{corect}).

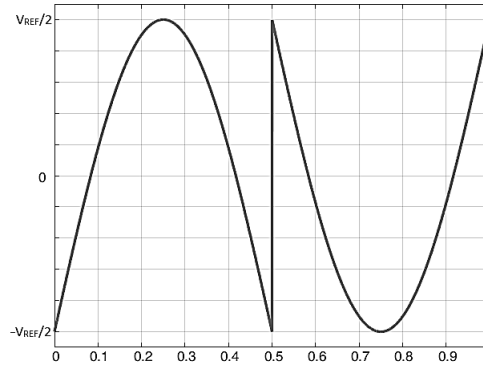


Fig. 21. Forma de undă de la ieșirea CNA-ului.

Se observă că cele două zone corespunzătoare bitului $b1=0$ respectiv $b1=1$ au fost prelucrate conform relației (40).

Rezoluția unui CNA reprezintă cel mai mic salt de tensiune pe care acesta îl poate da la ieșire, adică saltul de tensiune determinat numai de modificarea valorii LSB-ului. Se poate determina rezoluția ca fiind diferența dintre tensiunile de la ieșirea CNA-ului determinate de 2 numere care diferă numai prin LSB (consecutive). Se pot alege oricare două numere consecutive, dar alegerea anumitor cazuri particulare pot determina simplificarea calculelor. În cazul de față se tratează numerele 1 și 0 (adică 000...0 și 000...1).

Rezoluția CNA-ului funcționând conform CBD în conectare normală este:

$$\begin{aligned}\delta_{corect} &= |U_{corect}|_{b_n=1, b_k=0, k \neq n} - U_{corect}|_{b_k=0, \forall k}| = \left| V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + 2^{-n} \right) - V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + 0 \right) \right| \\ &= V_{REF} \cdot 2^{-n}\end{aligned}\quad (41)$$

Rezoluția CNA-ului funcționând conform CBD în conectarea din problema curentă pentru a efectua operația de înmulțire este:

$$\begin{aligned}\delta_{înmulțire} &= |U|_{b_n=1, b_k=0, k \neq n} - U|_{b_k=0, \forall k}| = \left| 2V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + 2^{-n} \right) + \frac{V_{REF}}{2} - \left[2V_{REF} \left(-\frac{1}{2} + 0 \right) + \frac{V_{REF}}{2} \right] \right| \\ &= 2V_{REF} \cdot 2^{-n} = 2\delta_{corect}\end{aligned}\quad (42)$$

Se observă că în cazul conectării din această problemă, din cauza nealocării bitului suplimentar, rezoluția este de două ori mai slabă, cum era de așteptat. O valoare mică a rezoluției este de dorit într-un convertor.

CONVENȚII DE NOTARE

În problemele următoare din acest capitol s-a marcat dependența de N (numărul aplicat la intrarea convertorului) în dreptul fiecărei variabile care conține în expresia sa biții care formează numărul. Din acest motiv anumite variabile pot fi găsite fie cu dependența de N explicit marcată, fie nu, în funcție de ce conține expresia respectivei variabile la un moment dat. De exemplu expresia variabilei X va fi scrisă

$$X = A \cdot B + C$$

dacă nu apar deloc în expresie biții numărului N sau

$$X(N) = A(N) \cdot B + C$$

dacă biții apar explicit în expresia variabilei A sau

$$X(N) = A \cdot B + C \sum_{k=1}^{10} b_k \cdot 2^{-k}$$

dacă biții apar explicit în expresia variabilei X . Este clar că notația nu este riguros completă cum ar fi, de exemplu,

$$X(A, B, C) = A \cdot B + C$$

dar astfel de notații ocupă foarte mult spațiu doar pentru a oferi informații deja evidente și sunt evitate. Toate cele expuse mai sus sunt numai convenții de notare și nu intervin în esența rezolvării problemelor.

Problema 1.14. Cu ajutorul CNA-ului cu rețea R - $2R$ se construiește convertorul cu ieșire în tensiune din figură. Se cunosc $R=10\text{ k}\Omega$, $V_r=10\text{ V}$. Să se determine relația de conversie $U_o(N)$, domeniul valorilor pe care le poate lua tensiunea de ieșire U_o , polaritatea și rezoluția convertorului.

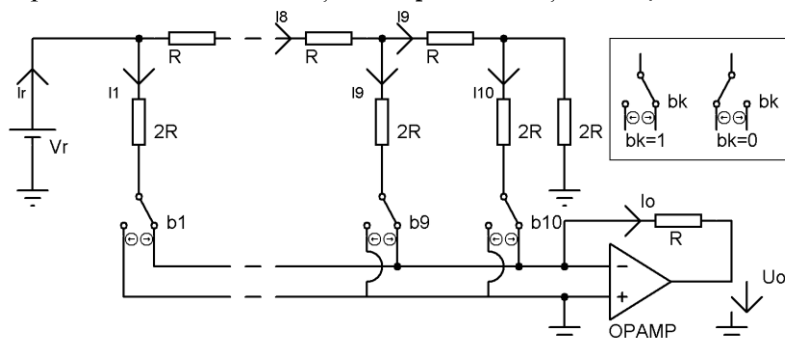


Fig. 22. Schema unui CNA cu rețea R - $2R$.

DIVIZORUL DE CURENT

Circuitul care stă la baza acestei probleme este divizorul de curent prezentat în continuare. Schema sa este prezentată în Fig. 23.:

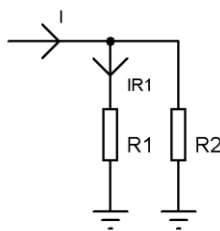


Fig. 23. Divizorul de curent

Cunoscând curentul I care atacă o grupare paralel de rezistoare (sau impedanțe, în general) de valori cunoscute, se pune problema determinării curentului printr-un rezistor. În cazul de față s-a ales determinarea curentului prin $R1$. Se poate demonstra că $IR1$ are următoarea expresie:

$$IR1 = \frac{R2}{R1+R2} \cdot I \quad (43)$$

Rezolvare:

Relația de conversie se referă la expresia care leagă tensiunea de ieșire U_o de numărul N aplicat convertorului. N este un număr binar reprezentat pe 10 biți, de forma $N=b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9b_{10}$. Starea fiecărui bit determină starea fiecărui comutator așa cum se poate observa în schema convertorului. Dacă bitul b_k este egal cu 1, comutatorul respectiv este pe poziția din dreapta. Analog, dacă $b_k=0$, comutatorul respectiv va fi pe poziția din stânga.

Ținând cont de faptul că tensiunea între bornele de intrare ale unui amplificator operațional (AO) ideal este zero, potențialul intrării neinversoare (V_+) va fi întotdeauna egal cu cel al intrării inversoare (V_-). În cazul de față înseamnă că potențialul intrării inversoare (V_-) va fi zero deoarece borna neinversoare (+) este legată direct la masă, adică borna inversoare (-) va reprezenta punct virtual de masă. U_o este tensiunea dintre ieșirea AO și masă. Cum V_- este punct virtual de masă, U_o va fi tensiunea pe rezistența R din bucla de reacție a AO și, deoarece sensul curentului I_o a fost ales contrar sensului tensiunii U_o , aceasta va avea următoarea expresie:

$$U_o = -I_o \cdot R \quad (44)$$

Deoarece curenții de intrare într-un AO ideal sunt nuli, I_o va fi suma tuturor curenților care atacă borna inversoare (-), adică suma tuturor curenților care curg prin comutatoarele aflate pe poziția din dreapta, adică acele comutatoare care au bitul de comandă din numărul N egal cu 1. Așadar N va determina care din curenți se vor suma pentru a forma curentul I_o care determină la rândul său tensiunea de ieșire. Se poate observa deja legătura dintre U_o și N .

Scriind legea I a lui Kirchhoff în nodul la care este conectată borna inversoare (-) a AO și ținând cont că dintre curenții $I_1, I_2, \dots, I_{10}$ pot ajunge în acest nod numai cei pentru care $b_1, b_2, \dots$, respectiv b_{10} sunt egali cu 1 (cei pentru care comutatoarele sunt pe poziția din dreapta) rezultă:

$$I_o(N) = \sum_{k=1}^{10} b_k \cdot I_k \quad (45)$$

$$U_o(N) = -\sum_{k=1}^{10} b_k \cdot I_k \cdot R \quad (46)$$

Legătura între U_o și N se poate observa deja, însă nu se cunosc valorile curenților I_k . Singurele date sunt valorile rezistențelor și tensiunea de referință V_r . Curenții se pot determina din aproape în aproape.

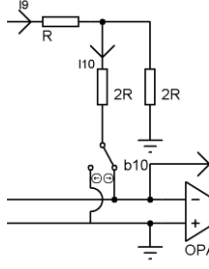


Fig. 24. Parte de schemă necesară pentru explicații.

Așa cum se poate observa în Fig. 24, cele două rezistoare de valoare $2R$ atacate de curentul I_9 sunt conectate în paralel deoarece I_9 le atacă într-un nod în care sunt interconectate, iar ambele au celălalt terminal legat la masă (unul la masa propriu zisă, iar celălalt la masa virtuală reprezentată de borna inversoare $(-)$ a AO dacă $b_{10}=1$ sau tot la masa propriu zisă dacă $b_{10}=0$). Deci cele două rezistențe formează un divizor de curent pentru I_9 . Este clar că rezistorul R nu influențează relația deoarece curentul este același într-o latură de circuit deci nu contează că s-a marcat înainte de R sau s-ar fi marcat după R . Așadar rezultă:

$$I_{10} = \frac{2R}{2R+2R} \cdot I_9 = \frac{I_9}{2} \quad (47)$$

În continuare se va trata situația lui I_8 . Schema pe care se va face analiza este următoarea:

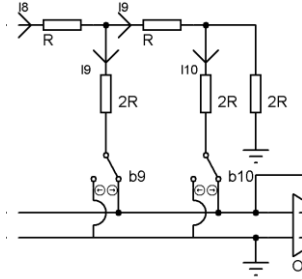


Fig. 25. Parte de schemă necesară pentru explicații.

Așa cum s-a arătat mai sus, cele două rezistoare $2R$ prin care trece curentul I_{10} (este clar că I_9 se împarte în 2 curenți egali conform relației (43)) sunt conectate în paralel. Așadar ele pot fi echivalate cu un singur rezistor de valoare R . Acesta se va găsi în serie cu rezistorul R lângă care a fost marcat I_9 . Deci acestea împreună vor forma un rezistor de valoare $2R$. Astfel situația lui I_8 este identică cu cea în care s-a aflat I_9 în paragraful anterior când s-a dedus relația (43). Similar rezultă:

$$I_9 = \frac{2R}{2R+2R} \cdot I_8 = \frac{I_8}{2} \quad (48)$$

Aplicând cele prezentate mai sus în mod succesiv rezultă:

$$I_{10} = \frac{I_9}{2} = \frac{I_8}{2^2} = \frac{I_7}{2^3} = \dots = \frac{I_r}{2^{10}} \quad (49)$$

Așadar:

$$I_k = \frac{I_r}{2^k} \quad (50)$$

După echivalarea în mod similar a tuturor rezistențelor văzute de către sursa de tensiune V_r , I_r și, în final relația de conversie, rezultă:

$$I_r = \frac{V_r}{R} \quad (51)$$

$$U_o(N) = -V_r \sum_{k=1}^{10} b_k \cdot 2^{-k} \quad (52)$$

Pentru determinarea domeniului valorilor pe care le poate lua tensiunea de ieșire este suficient să se determine cele două valori extreme: maximă și minimă. Acestea se pot afla aplicând relația de conversie pentru valorile extreme ale lui N din codul în care funcționează convertorul. În cazul de față, în expresia (48) se poate observa codul binar, iar valorile extreme pe 10 biți sunt $0000000000|_B$ și $1111111111|_B$. Rezultă:

$$U(0000000000|_B) = -V_r \sum_{k=1}^{10} 0 \cdot 2^{-k} = 0 \text{ V} \quad (53)$$

$$U(1111111111|_B) = -V_r \sum_{k=1}^{10} 1 \cdot 2^{-k} = -V_r \cdot 2^{-1} \cdot \frac{1-(2^{-1})^{10}}{1-2^{-1}} = -9,9902 \text{ V} \quad (54)$$

Domeniul tensiunii de ieșire este $[0, -9,9902] \text{ V}$. Convertorul este unipolar deoarece tensiunea de ieșire nu schimbă semnul pe întreg domeniul din care aceasta poate lua valori.

Rezoluția se calculează ca diferența în modul a tensiunilor de ieșire obținute pentru oricare două numere consecutive din gama de lucru a convertorului.

$$\delta = |U(0000000001|_B) - U(0000000000|_B)| = |-V_r \cdot 2^{-10} - (-V_r \cdot 0)| = 9,765 \text{ mV} \quad (55)$$

Problema 1.15. Se dă CNA-ul pe 8 biți cu rezistențe ponderate din Fig. 26. Se cunosc $R=10\text{k}\Omega$, $V_r=10\text{V}$. Să se determine relația de conversie $U_o(N)$, domeniul valorilor pe care le poate lua tensiunea de ieșire U_o , polaritatea și rezoluția convertorului. Desenați forma de undă de la ieșirea convertorului dacă la intrarea sa se aplică succesiv numerele $N_1 = 0F|_H$, $N_2 = 80|_H$ și $N_3 = FF|_H$, fiecare timp de 10 ns.

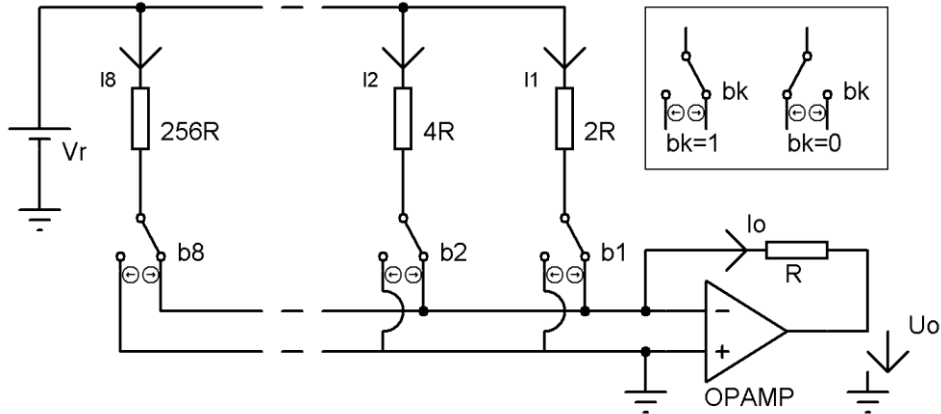


Fig. 26. Schema unui CNA cu rezistențe ponderate.

Rezolvare:

Problema curentă este similară cu problema 1.14. Se observă că borna inversoare (−) a AO reprezintă și în acest caz punct virtual de masă. Așadar tensiunea de ieșire are aceeași expresie ca în cazul anterior și anume relația (44). I_o este și în acest caz suma curenților care trec prin comutatoarele aflate în poziția din dreapta, deci cele pentru care bitul de comandă este egal cu 1. Este valabilă relația (45), dar particularizată pe situația curentă care în care se lucrează numai cu 8 biți:

$$I_o(N) = \sum_{k=1}^8 b_k \cdot I_k \quad (56)$$

Fiecare dintre cele 8 rezistoare au un terminal conectat la sursa de alimentare și celălalt la potențial nul (fie direct la masă în cazul în care comutatorul respectiv este în poziția din stânga, deci dacă bitul care comandă comutatorul este egal cu zero, fie la masa virtuală în celălalt caz). Ținând cont de valorile rezistențelor rezultă curenții:

$$I_k = \frac{V_r}{2^k \cdot R} \quad (57)$$

Relația de conversie rezultă astfel:

$$U_o(N) = -V_r \sum_{k=1}^8 b_k \cdot 2^{-k} \quad (58)$$

Domeniul tensiunii de ieșire:

$$U(00000000|_B) = -V_r \sum_{k=1}^8 0 \cdot 2^{-k} = 0 \text{ V} \quad (59)$$

$$U(11111111|_B) = -V_r \sum_{k=1}^8 1 \cdot 2^{-k} = -V_r \cdot 2^{-1} \cdot \frac{1-(2^{-1})^8}{1-2^{-1}} = -9,9609 \text{ V} \quad (60)$$

Domeniul tensiunii de ieșire este $[0, -9,9609] \text{ V}$. Convertorul este unipolar deoarece tensiunea de ieșire nu schimbă semnul pe întreg domeniul din care aceasta poate lua valori.

Rezoluția convertorului:

$$\delta = |U(00000001|_B) - U(00000000|_B)| = |-V_r \cdot 2^{-8} - (-V_r \cdot 0)| = 39,062 \text{ mV} \quad (61)$$

Pentru desenarea formei de undă se determină întâi valorile tensiunii de ieșire pentru fiecare număr aplicat:

$$U(0F|_H) = U(00001111|_B) = -V_r \sum_{k=5}^8 1 \cdot 2^{-k} = -10 \cdot 2^{-5} \frac{1-(2^{-1})^4}{1-2^{-1}} = -0,586 \text{ V} \quad (62)$$

$$U(80|_H) = U(10000000|_B) = -V_r \cdot 2^{-1} = -5 \text{ V} \quad (63)$$

$$U(FF|_H) = U(11111111|_B) = -V_r \sum_{k=1}^8 1 \cdot 2^{-k} = -10 \cdot 2^{-1} \frac{1-(2^{-1})^8}{1-2^{-1}} = -9,9609 \text{ V} \quad (64)$$

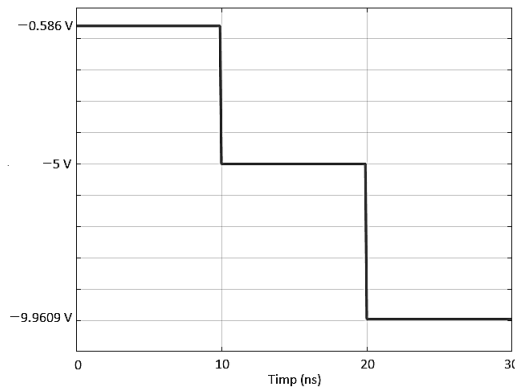


Fig. 27. Tensiunea de la ieșirea CNA-ului la aplicarea succesivă la intrarea sa a numerelor $N_1 = 0F|_H$, $N_2 = 80|_H$ și $N_3 = FF|_H$, fiecare timp de 10 ns.

Rezolvare:

$$I_R = \frac{U_{Rr}}{Rr} = \frac{V_r - 0}{Rr} = \frac{V_r}{Rr} \quad (65)$$

Tranzistoarele $T_0 - T_9$ au arii diferite ale joncțiunii bază-emitor ($A \dots 16A$) ceea ce determină curenții de saturație ai acestor joncțiuni să difere în consecință, adică aceste tranzistoare vor putea avea curenți de colector diferiți la aceeași tensiune bază emitor. Curentul de saturație este direct proporțional cu aria, iar curentul de colector direct proporțional cu curentul de saturație. În condiții de tensiuni bază-emitor egale există relațiile:

$$A_0=2A_1=4A_2=8A_3=16A_4=16A \Rightarrow_8 I_{s0}=2I_{s1}=4I_{s2}=8I_{s3}=16I_{s4}=16I_{s9} \quad (66)$$

$$A_5=2A_6=4A_7=4A_8 \Rightarrow I_{s5}=2I_{s6}=4I_{s7}=4I_{s8} \quad (67)$$

Ecuatiile de funcționare ale unui tranzistor bipolar sunt:

$$I_C = I_s \cdot \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_T}\right) \quad (68)$$

$$\frac{I_C}{I_E} = \alpha \quad (69)$$

Rezultă:

$$I_{C0}=2I_{C1}=4I_{C2}=8I_{C3}=16I_{C4}=16I_{C8} \Rightarrow I_{E0}=2I_{E1}=4I_{E2}=8I_{E3}=16I_{E4}=16I_{E9} \quad (70)$$

$$I_{C5}=2I_{C6}=4I_{C7}=4I_{C8} \Rightarrow I_{E5}=2I_{E6}=4I_{E7}=4I_{E8} \quad (71)$$

Deoarece se lucrează numai în curent continuu și tranzistoarele sunt considerate în RAN, tensiunile bază-emitor vor fi tensiuni continue egale cu tensiunea de deschidere a joncțiunii bază-emitor ($\approx 0,6$ V), deci relațiile de mai sus sunt valabile.

Scriind legea I a lui Kirchhoff în nodul reprezentat de colectorul tranzistorului T₉ rezultă:

$$I_{C9}=I_{E5}+I_{E6}+I_{E7}+I_{E8} \Rightarrow I_{C9}=I_{E5}+I_{E6}+2I_{E7} \Rightarrow I_{C9}=I_{E5}+2I_{E6} \Rightarrow I_{C9}=2I_{E5} \Rightarrow I_{C9}=2I_{C5} \quad (72)$$

$$I_{C0}=2I_{C1}=4I_{C2}=8I_{C3}=16I_{C4}=32I_{C5}=64I_{C6}=128I_{C7}=128I_{C8} \quad (73)$$

Curenții care trec prin comutatoare, notați $I_{b1} - I_{b7}$ (fiecare trecând prin comutatorul corespunzător bitului $b1 - b7$) vor fi chiar curenții de colector ai tranzistoarelor T₁ – T₇ ($I_{C1} - I_{C7}$):

$$I_{b0}=2I_{b1}=4I_{b2}=8I_{b3}=16I_{b4}=32I_{b5}=64I_{b6}=128I_{b7} \quad (74)$$

În colectorul tranzistorului T₈ este instalat un divizor de curent notat $\frac{1}{2}$. Așadar deși $I_{C7}=I_{C8}$, rezultă:

$$I_{b7}=2I_{b8} \quad (75)$$

Cum $I_{C0}=I_R$ și ținând cont de poziția comutatoarelor corespunzătoare biților egali cu „1” respectiv „0”:

$$I_o = I_R \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} \quad (76)$$

$$\bar{I}_o = I_R \sum_{k=1}^8 \bar{b}_k 2^{-k} = I_R \sum_{k=1}^8 (1 - b_k) 2^{-k} \quad (77)$$

Problema 1.17. Se dă CNA-ul cu ieșire în tensiune din Fig. 29. Se cunosc $V_T=10$ V, $R_T=5$ kΩ, $\varepsilon_{R1}=\varepsilon_{R1}=0,5\%$, $\varepsilon_{VT}=0,5\%$. Să se determine valorile rezistoarelor R_1 și R_2 astfel încât convertorul să fie bipolar cu $V_{Omin} = -10$ V și $V_{Omax} = 10$ V. Care este numărul efectiv de biți cu care lucrează convertorul dacă numărul aplicat acestuia este $N = 40|_H$?

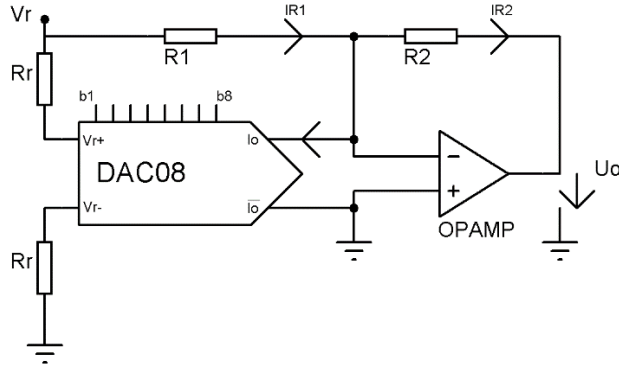


Fig. 29. Schema unui CNA cu DAC08.

Rezolvare:

Se cunoaște expresia curentului de ieșire a convertorului DAC08:

$$I_o(N) = \frac{V_r}{R_r} \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} \quad (78)$$

În primul rând se va determina relația de conversie. Se poate observa că intrarea neînversoare a AO este legată direct la masă, deci intrarea înversoare va constitui punct virtual de masă. Tensiunea de ieșire este tensiunea între borna de ieșire a AO și masă, deci poate fi considerată tensiunea pe rezistorul R_2 . Deoarece curentul prin rezistorul R_2 , I_{R2} , a fost marcat în sens invers decât tensiunea, rezultă:

$$U_o = -I_{R2} \cdot R_2 \quad (79)$$

Scriind legea I a lui Kirchhoff în nodul la care este conectată borna înversoare a AO:

$$I_{R1} - I_o(N) - I_{R2} = 0 \Rightarrow -I_{R2} = I_o(N) - I_{R1} \quad (80)$$

Deoarece borna neînversoare a AO este punct de masă virtuală:

$$I_{R1} = \frac{V_r}{R_1} \quad (81)$$

Rezultă din cele de mai sus relația de conversie:

$$U_o(N) = -I_{R2} \cdot R_2 = (I_o(N) - I_{R1}) \cdot R_2 = \frac{V_r R_2}{R_r} \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} - \frac{V_r R_2}{R_1} \quad (82)$$

Se observă că atunci când N crește, valoarea lui U_o crește. Se pot impune acum condițiile:

$$U_o(\text{FF}|_H) = 10 \text{ V și } U_o(00|_H) = -10 \text{ V} \quad (83)$$

$$U_o(00|_H) = -\frac{V_r R_2}{R_1} = -10 \text{ V} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = 1 \Rightarrow R_1 = R_2 \quad (84)$$

$$U_o(\text{FF}|_H) = \frac{V_r R_2}{R_r} \sum_{k=1}^8 1 \cdot 2^{-k} - \frac{V_r R_2}{R_1} = \frac{V_r R_2}{R_r} 2^{-1} \frac{1-(2^{-1})^8}{1-2^{-1}} - \frac{V_r R_2}{R_1} \xrightarrow{R_1=R_2} \frac{V_r R_2}{R_r} (1-2^{-8}) - V_r = 10 \text{ V} \quad (85)$$

$$R_2 = \frac{(10+V_r) \cdot R_r}{(1-2^{-8}) \cdot V_r} \cong 10 \text{ k}\Omega \Rightarrow R_1 = 10 \text{ k}\Omega \quad (86)$$

Pentru a determina pe câți biți lucrează convertorul trebuie întâi să se determine eroarea ce va caracteriza tensiunea de ieșire, eroare cauzată de componentele care nu sunt ideale (sunt caracterizate

de o eroare relativă a valorilor) și de eroarea relativă a tensiunii de referință V_r . Problema aproximează o situație din practică introducând aceste noi date.

Eroarea relativă a tensiunii de ieșire va fi calculată folosind formula propagării erorilor. O mărime f dependentă de alte mărimi $x_1, x_2, \dots, x_n$ (sau $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$) va avea eroarea relativă determinată de erorile relative ale mărimilor de care este dependentă și de relația dintre aceste mărimi astfel:

$$\varepsilon_{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \frac{x_1}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right| \cdot \varepsilon_{x_1} + \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} \frac{x_2}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right| \cdot \varepsilon_{x_2} + \dots + \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \frac{x_n}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right| \cdot \varepsilon_{x_n} \quad (87)$$

Particularizând pentru situația din problema curentă și notând $\sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k}$ cu $S(N)$:

$$\varepsilon_{V_o(40|H)} = \left| \frac{\partial V_o}{\partial V_r} \frac{V_r}{V_o} \right| \cdot \varepsilon_{V_r} + \left| \frac{\partial V_o}{\partial R_1} \frac{R_1}{V_o} \right| \cdot \varepsilon_{R_1} + \left| \frac{\partial V_o}{\partial R_2} \frac{R_2}{V_o} \right| \cdot \varepsilon_{R_2} \quad (88)$$

$$\left| \frac{\partial V_o}{\partial V_r} \frac{V_r}{V_o} \right| = \left(\frac{R_2}{R_r} S(N) - \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{V_r}{V_r \left(\frac{R_2}{R_r} S(N) - \frac{R_2}{R_1} \right)} = 1 \quad (89)$$

$$\left| \frac{\partial V_o}{\partial R_1} \frac{R_1}{V_o} \right| = \frac{V_r R_2}{R_1^2} \frac{R_1}{V_r R_2 \left(\frac{S(N)}{R_r} - \frac{1}{R_1} \right)} = \frac{R_r}{S(N) R_1 - R_r} \quad (90)$$

$$\left| \frac{\partial V_o}{\partial R_2} \frac{R_2}{V_o} \right| = V_r \left(\frac{S(N)}{R_r} - \frac{1}{R_1} \right) \frac{R_2}{V_r R_2 \left(\frac{S(N)}{R_r} - \frac{1}{R_1} \right)} = 1 \quad (91)$$

$$N = 40|_H = 01000000|_B \Rightarrow S(40|_H) = \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} = 1 \cdot 2^{-2} = 1/4 \quad (92)$$

$$\varepsilon_{V_o(40|H)} = 1 \cdot \varepsilon_{V_r} + \left| \frac{R_r}{S(N) \cdot R_1 - R_r} \right| \cdot \varepsilon_{R_1} + 1 \cdot \varepsilon_{R_2} = 0,5\% + 2 \cdot 0,5\% + 0,5\% = 2\% \quad (93)$$

Eroarea absolută a tensiunii de ieșire este:

$$e_{V_o(40|H)} = |\varepsilon_{V_o(40|H)} \cdot V_o(40|H)| = |0,02 \cdot (-5)| = 0,1 \text{ V} \quad (94)$$

Convertorul funcționează cu 8 biți. Pentru a determina numărul efectiv de biți vom determina rezoluția convertorului în situația în care acesta ar funcționa cu din ce în ce mai puțini biți, începând bineînțeles cu numărul maxim (aici 8), până când se găsește acea rezoluție care este mai mare sau egală cu eroarea absolută determinată mai sus.

$$\delta_8 \text{ biți} = |U_o(00000001|_B) - U_o(00000000|_B)| = \frac{V_r R_2}{R_r} 2^{-8} - \frac{V_r R_2}{R_1} - \left(-\frac{V_r R_2}{R_1} \right) = 0,078 \text{ V} < e_{V_o(40|H)} \quad (95)$$

$$\delta_7 \text{ biți} = |U_o(0000001|_B) - U_o(0000000|_B)| = \frac{V_r R_2}{R_r} 2^{-7} - \frac{V_r R_2}{R_1} - \left(-\frac{V_r R_2}{R_1} \right) = 0,156 \text{ V} > e_{V_o(40|H)} \quad (96)$$

Convertorul funcționează cu 7 biți efectivi.

Problema 1.18. Se dă CNA-ul cu ieșire în tensiune din Fig. 30. Se cunosc $V_r=10 \text{ V}$, $R_1=5 \text{ k}\Omega$, $R_2=R_r=10 \text{ k}\Omega$. Să se determine relația de conversie, domeniul valorilor pe care le poate lua tensiunea de ieșire, polaritatea și rezoluția convertorului pentru fiecare din ieșirile U_1 , U_2 și U_3 .

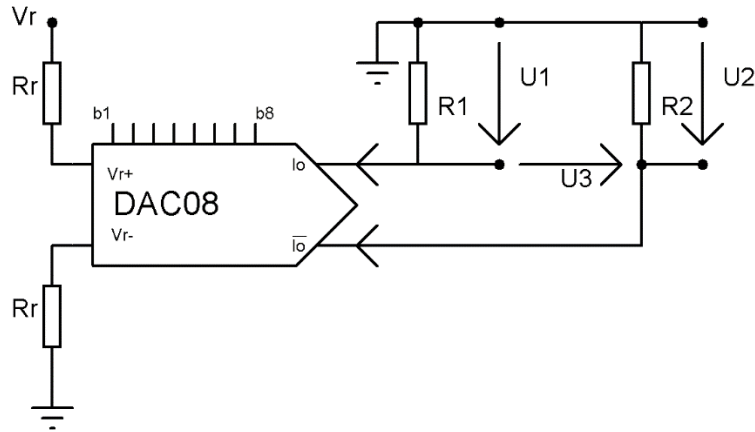


Fig. 30. Schema unui CNA cu DAC08 și 3 ieșiri.

Rezolvare:

Se cunosc expresiile curenților de ieșire ai convertorului DAC08, N fiind numărul aplicat convertorului:

$$I_o(N) = \frac{V_r}{R_r} \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} \text{ și } \bar{I}_o(N) = \frac{V_r}{R_r} \sum_{k=1}^8 \bar{b}_k 2^{-k} = \frac{V_r}{R_r} \sum_{k=1}^8 (1 - b_k) 2^{-k} \quad (97)$$

Pentru ieșirea U₁:

Relația de conversie rezultă imediat deoarece U₁ este tensiunea pe rezistența R₁ și tensiunea și curentul I_o au fost marcate în același sens:

$$U_1 = I_o(N) \cdot R_1 \Rightarrow U_1(N) = \frac{V_r R_1}{R_r} \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} \quad (98)$$

Domeniul valorilor tensiunii U₁ este:

$$U_1(00|_H) = \frac{V_r R_1}{R_r} \sum_{k=1}^8 0 \cdot 2^{-k} = 0 \text{ V} \quad (99)$$

$$U_1(FF|_H) = \frac{V_r R_1}{R_r} \sum_{k=1}^8 1 \cdot 2^{-k} = \frac{V_r R_1}{R_r} (1 - 2^{-8}) = 4,9805 \text{ V} \quad (100)$$

Domeniul tensiunii de ieșire este [0, 4,9805] V. Convertorul este unipolar deoarece tensiunea de ieșire nu schimbă semnul pe întreg domeniul din care aceasta poate lua valori.

Rezoluția convertorului cu ieșirea U₁ este:

$$\delta_{U_1} = |U_1(01|_H) - U_1(00|_H)| = \frac{V_r R_1}{R_r} \cdot 2^{-8} = 19,531 \text{ mV} \quad (101)$$

Pentru ieșirea U₂:

Relația de conversie rezultă imediat deoarece U₂ este tensiunea pe rezistența R₂ și tensiunea și curentul $\bar{I}_o$ au fost marcate în același sens:

$$U_2 = \bar{I}_o(N) \cdot R_2 \Rightarrow U_2(N) = \frac{V_r R_2}{R_r} \sum_{k=1}^8 \bar{b}_k 2^{-k} = \frac{V_r R_2}{R_r} \sum_{k=1}^8 2^{-k} - \frac{V_r R_2}{R_r} \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} \xrightarrow{R_2=2 \cdot R_1}$$

$$U_2(N) = 2 \cdot 4,9805 - 2 \frac{V_r R_1}{R_r} \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} = 2(4,9805 - U_1(N)) \quad (102)$$

Domeniul valorilor tensiunii U₂ este:

$$U_2(00|_H) = 2 \left(4,9805 - \frac{V_r R_1}{R_r} \sum_{k=1}^8 0 \cdot 2^{-k} \right) = 9,9609 \text{ V} \quad (103)$$

$$U_2(FF|_H) = 2 \left(4,9805 - \frac{V_r R_1}{R_r} \sum_{k=1}^8 1 \cdot 2^{-k} \right) = 0 \text{ V} \quad (104)$$

Domeniul tensiunii de ieșire este $[0, 9,9609] \text{ V}$. Convertorul este unipolar deoarece tensiunea de ieșire nu schimbă semnul pe întreg domeniul din care aceasta poate lua valori.

Rezoluția convertorului cu ieșirea U_2 este:

$$\delta_{U_2} = |U_2(01|_H) - U_2(00|_H)| = \left| 2 \left(4,9805 - \frac{V_r R_1}{R_r} 2^{-8} \right) - 2 \cdot 4,9805 \right| = 2\delta_{U_1} = 39,063 \text{ mV} \quad (105)$$

Pentru ieșirea U_3 :

Pentru a determina tensiunea U_3 se va scrie legea a II-a a lui Kirchhoff pe bucla ce conține tensiunile U_1 , U_2 și U_3 . Cu sensurile tensiunilor alese ca în schemă rezultă:

$$U_1 + U_3 - U_2 = 0 \Rightarrow U_3 = U_2 - U_1 \quad (106)$$

Relația de conversie rezultă înlocuind expresiile tensiunilor în relația de mai sus:

$$U_3(N) = 2(4,9805 - U_1(N)) - U_1(N) = 9,9609 - 3 \cdot U_1(N) = 9,9609 - 3 \cdot \frac{V_r R_1}{R_r} \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} \quad (107)$$

$$U_3(00|_H) = 9,9609 - 3 \cdot \frac{V_r R_1}{R_r} \sum_{k=1}^8 0 \cdot 2^{-k} = 9,9609 \text{ V} \quad (108)$$

$$U_3(FF|_H) = 9,9609 - 3 \cdot \frac{V_r R_1}{R_r} \sum_{k=1}^8 1 \cdot 2^{-k} = -4,9805 \text{ V} \quad (109)$$

Domeniul tensiunii de ieșire este $[-4,9805, 9,9609] \text{ V}$. Convertorul este bipolar deoarece tensiunea de ieșire schimbă semnul în domeniul din care aceasta poate lua valori.

Rezoluția convertorului cu ieșirea U_3 este:

$$\delta_{U_3} = |U_3(01|_H) - U_3(00|_H)| = \left| 9,9609 - 3 \cdot \frac{V_r R_1}{R_r} 2^{-8} - \left(9,9609 - 3 \cdot \frac{V_r R_1}{R_r} \cdot 0 \right) \right| = 3\delta_{U_1} = 58,593 \text{ mV} \quad (110)$$

Problema 1.19. Se dă CNA-ul cu ieșire în tensiune din Fig. 31. Se cunosc $V_r=10 \text{ V}$, $R_1=5 \text{ k}\Omega$, $R_2=R_3=R_r=10 \text{ k}\Omega$. Să se determine relația de conversie, domeniul valorilor pe care le poate lua tensiunea de ieșire, polaritatea și rezoluția convertorului.

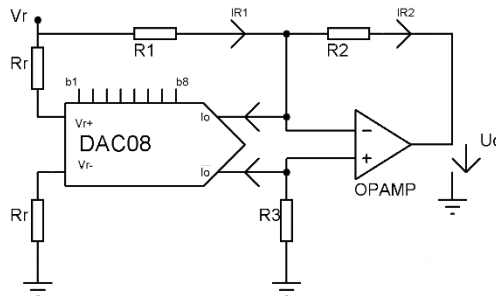


Fig. 31. Schema unui CNA cu DAC08.

Rezolvare:

Se cunosc expresiile curenților de ieșire ai convertorului DAC08, N fiind numărul aplicat convertorului, date în expresia (97).

Se cunoaște faptul că tensiunea între două noduri A și B ale unui circuit este egală cu diferența potențialelor acelor noduri $U_{AB}=V_A-V_B$.

Tensiunea pe rezistența R_3 considerată cu sensul pornind de la terminalul legat la masă către intrarea $\bar{I}_0$ a convertorului DAC08 (sau a bornei neinversoare a AO), ținând cont de faptul că sensul ales în acest fel este același cu cel ales pentru curentul $\bar{I}_0$, va avea expresia:

$$U_3(N) = \bar{I}_0(N) \cdot R_3 = \frac{V_r R_3}{R_r} \sum_{k=1}^8 \bar{b}_k 2^{-k} \quad (111)$$

Această tensiune este diferența potențialelor celor două noduri la care sunt legate cele două terminale ale rezistorului R_3 (masă și borna neinversoare a AO). Ne interesează potențialul nodului la care se leagă borna neinversoare a AO.

$$U_3 = V_{GND} - V_{AO+} = 0 - V_{AO+} \Rightarrow V_{AO+}(N) = -U_3(N) = -\frac{V_r R_3}{R_r} \sum_{k=1}^8 \bar{b}_k 2^{-k} \quad (112)$$

$$= -\frac{V_r R_3}{R_r} \sum_{k=1}^8 (1 - b_k) 2^{-k} = -\frac{V_r R_3}{R_r} \sum_{k=1}^8 2^{-k} + \frac{V_r R_3}{R_r} \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} \quad (113)$$

Se fac notațiile: $\frac{V_r R_3}{R_r} \sum_{k=1}^8 2^{-k} = K$ și $\sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} = S(N)$.

$$V_{AO+}(N) = \frac{V_r R_3}{R_r} S(N) - K \quad (114)$$

Scriind tensiunea pe rezistența R_2 cu sensul ales de la ieșirea AO (cu potențialul notat V_o) către borna inversoare a acestuia ca diferența potențialelor nodurilor respective și ținând cont că bornele de intrare ale unui AO ideal au același potențial ($V_{AO+}=V_{AO-}$), rezultă:

$$U_{R_2} = V_o - V_{AO-} \xrightarrow{V_{AO-}=V_{AO+}} U_{R_2} = V_o - V_{AO+} \quad (115)$$

$$U_{R_2}(N) = V_o - V_{AO+} \Rightarrow V_o(N) = U_{R_2} + V_{AO+} \quad (116)$$

Tensiunea de ieșire este între borna de ieșire a AO și masă:

$$U_o = V_o - V_{GND} = V_o \quad (117)$$

Deoarece sensul curentului prin R_2 a fost marcat invers decât sensul ales pentru tensiunea U_{R_2} se poate scrie:

$$U_{R_2} = -I_{R_2} \cdot R_2 \quad (118)$$

Sintetizând:

$$U_o(N) = V_o(N) = U_{R_2} + V_{AO+} = -I_{R_2} \cdot R_2 + V_{AO+} \quad (119)$$

Scriind legea I a lui Kirchhoff în nodul la care este conectată borna inversoare a AO:

$$I_{R_1} - I_o(N) - I_{R_2} = 0 \Rightarrow -I_{R_2} = I_o(N) - I_{R_1} \quad (120)$$

Scriind tensiunea pe rezistența R_1 ca diferența potențialelor nodurilor la care sunt conectate terminalele sale și ținând cont de sensul ales al curentului prin aceasta:

$$U_{R_1} = V_r - V_{AO-} = I_{R_1} \cdot R_1 \xrightarrow{V_{AO-} = V_{AO+}} I_{R_1} = \frac{V_r - V_{AO+}}{R_1} \quad (121)$$

Relația de conversie:

$$\begin{aligned} U_o(N) = V_o(N) &= -I_{R_2} \cdot R_2 + V_{AO+} = (I_o(N) - I_{R_1})R_2 + V_{AO+} \\ &= I_o(N)R_2 - \frac{V_r - V_{AO+}}{R_1} R_2 + V_{AO+} = I_o(N)R_2 + V_{AO+} \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) - \frac{V_r R_2}{R_1} \end{aligned} \quad (122)$$

$$= I_o(N)R_2 + \left(\frac{V_r R_3}{R_r} S(N) - K \right) \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) - \frac{V_r R_2}{R_1}$$

$$= \frac{V_r R_2}{R_r} \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} + \left(\frac{V_r R_3}{R_r} \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} - K \right) \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) - \frac{V_r R_2}{R_1}$$

$$= 10 \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} + (10 \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} - 9,961) \cdot 3 - 20 = 40 \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} - 49,883 \quad (123)$$

$$U_o(00|_H) = 40 \sum_{k=1}^8 0 \cdot 2^{-k} - 49,883 = -49,883 \text{ V} \quad (124)$$

$$U_o(FF|_H) = 40 \sum_{k=1}^8 1 \cdot 2^{-k} - 49,883 = -10,039 \text{ V} \quad (125)$$

Domeniul tensiunii de ieșire este $[-49,883, -10,039] \text{ V}$. Convertorul este unipolar deoarece tensiunea de ieșire nu schimbă semnul în domeniul din care aceasta poate lua valori.

Rezoluția convertorului este:

$$\delta_{U_3} = |U_3(01|_H) - U_3(00|_H)| = |40 \cdot 2^{-8} - 49,883 - (40 \cdot 0 - 49,883)| = 156,25 \text{ mV} \quad (126)$$

Problema 1.20. Se dă CNA-ul cu ieșire în tensiune din Fig. 32. Se cunosc $V_r=10 \text{ V}$, $R_2=R_r=10 \text{ k}\Omega$. Să se determine relația de conversie, domeniul valorilor pe care le poate lua tensiunea de ieșire, polaritatea și rezoluția convertorului.

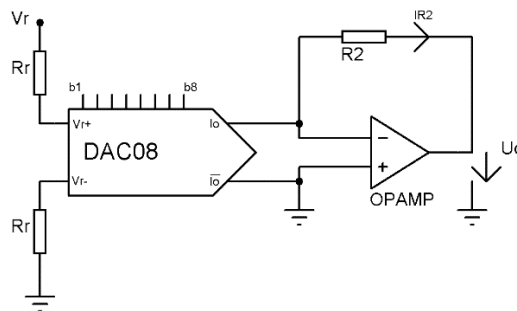


Fig. 32. Schema unui convertor cu DAC08.

Rezolvare:

Se cunosc expresiile curenților de ieșire ai convertorului DAC08, N fiind numărul aplicat convertorului, date în expresia (97).

Tensiunea de ieșire este între borna de ieșire a AO și masă. AO este ideal, deci potențialele bornelor sale de intrare sunt egale. Cum intrarea neinvertoră este legată la masă, intrarea inversoră va fi punct de masă virtuală. Așadar tensiunea de ieșire va fi tensiunea pe rezistența R_2 considerată de

la borna de ieșire a AO până la masa virtuală. Cum sensul curentului prin R_2 a fost ales în sens invers decât a fost ales sensul tensiunii, rezultă:

$$U_o = -I_{R_2} \cdot R_2 \quad (127)$$

Scriind prima lege a lui Kirchhoff în nodul la care este conectată borna inversoare a AO și știind că I_o intră în DAC08 rezultă:

$$-I_o(N) - I_{R_2} = 0 \Rightarrow -I_{R_2} = I_o(N) \quad (128)$$

$$U_o(N) = I_o(N) \cdot R_2 = \frac{V_r R_2}{R_r} \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} \quad (129)$$

$$U_o(00|_H) = \frac{V_r R_2}{R_r} \sum_{k=1}^8 0 \cdot 2^{-k} = 0 \text{ V} \quad (130)$$

$$U_o(FF|_H) = \frac{V_r R_2}{R_r} \sum_{k=1}^8 1 \cdot 2^{-k} = 9,961 \text{ V} \quad (131)$$

Domeniul tensiunii de ieșire este $[0, 9,961] \text{ V}$. Convertorul este unipolar deoarece tensiunea de ieșire nu schimbă semnul în domeniul din care aceasta poate lua valori.

Rezoluția convertorului este:

$$\delta = |U_o(01|_H) - U_o(00|_H)| = |10 \cdot 2^{-8} - 0| = 39,063 \text{ mV} \quad (132)$$

Problema 1.21. Fie CNA-ul cu rezistențe ponderate din Fig. 33. Se cunosc $V_r=10 \text{ V}$, $R_k=2^{k-1} \cdot R$, $k=1, \dots, 8$, $R=10 \text{ k}\Omega$. Să se determine:

- Relația de conversie, domeniul valorilor pe care le poate lua tensiunea de ieșire, polaritatea și rezoluția convertorului.
- Dacă timpul de comutare al comutatoarelor este $100 \mu\text{s}$ să se determine valoarea maximă a capacității parazite din nodul de ieșire astfel încât timpul maxim de conversie să fie $500 \mu\text{s}$.

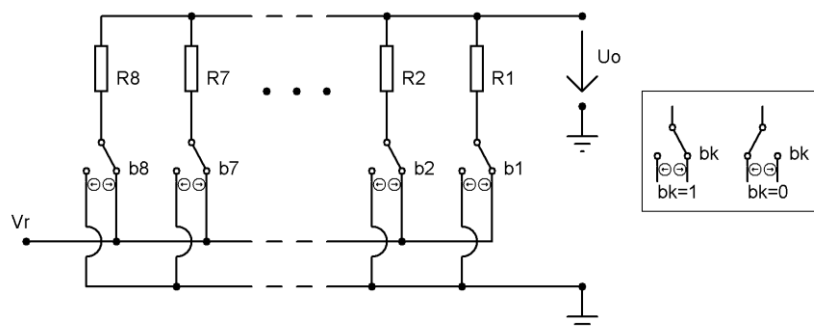


Fig. 33. Schema unui CNA pur pasiv cu rezistențe ponderate.

Rezolvare:

a) Se observă că toate rezistoarele au unul dintre terminale legate în comun la nodul de ieșire. Celălalt terminal al fiecărui rezistor va fi conectat la tensiunea de referință V_r sau la masă în funcție de starea comutatorului. Starea comutatoarelor este dictată de biții numărului N aplicat la intrare așa cum se poate vedea în anexa din dreapta schemei. Dacă bitul b_k este egal cu 1, atunci comutatorul b_k va fi

pe poziția din dreapta și invers în celălalt caz. Așadar la aplicarea unui număr N convertorului, anumite rezistoare vor fi conectate între U_o și V_r , iar celelalte între U_o și masă. Astfel vor exista două grupări paralele de rezistoare. De exemplu, dacă se aplică numărul $N = 11000000|_B$ schema rezultată va fi următoarea:

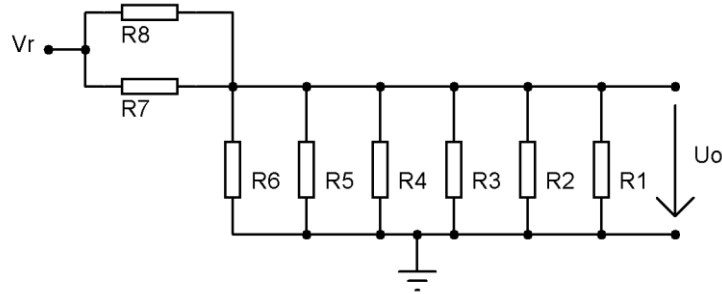


Fig. 34. Schema echivalentă obținută la aplicarea numărului $N = 11000000|_B$.

S-a format un divizor de tensiune cu două grupări paralele de rezistoare. Rezistența echivalentă a rezistoarelor conectate către V_r va fi notată R_{ech1} , iar a celeilalte grupări R_{ech2} . Tensiunea de ieșire se scrie:

$$U_o = \frac{R_{ech2}}{R_{ech1} + R_{ech2}} V_r \quad (133)$$

Pentru rezistoarele care vor fi legate către tensiunea de referință (determinate de biții b_k egali cu 1) se poate scrie următoarea relație ce permite calculul rezistenței echivalente determinată de acestea, notată R_{ech1} :

$$\frac{1}{R_{ech1}} = \sum_{k=1}^8 \frac{1}{R_k} b_k = \sum_{k=1}^8 \frac{1}{2^{k-1} \cdot R} b_k = \sum_{k=1}^8 \frac{2}{2^k \cdot R} b_k = \frac{2}{R} \sum_{k=1}^8 \frac{1}{2^k} b_k = \frac{2}{R} \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} \quad (134)$$

$$R_{ech1} = \frac{R}{2 \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k}} \quad (135)$$

În mod similar rezultă rezistența echivalentă a celeilalte grupări:

$$\frac{1}{R_{ech2}} = \sum_{k=1}^8 \frac{1}{R_k} \overline{b_k} = \sum_{k=1}^8 \frac{1}{R_k} (1 - b_k) = \sum_{k=1}^8 \frac{2}{2^k \cdot R} (1 - b_k) = \frac{2}{R} (\sum_{k=1}^8 2^{-k} - \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k}) \quad (136)$$

$$R_{ech2} = \frac{R}{2 \sum_{k=1}^8 2^{-k} - \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k}} \quad (137)$$

Relația de conversie rezultă:

$$\begin{aligned} U_o &= \frac{R_{ech2}}{R_{ech1} + R_{ech2}} V_r = \frac{\frac{R}{2 \sum_{k=1}^8 2^{-k} - \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k}}}{\frac{R}{2 \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k}} + \frac{R}{2 \sum_{k=1}^8 2^{-k} - \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k}}} V_r = \frac{\frac{1}{\sum_{k=1}^8 2^{-k} - \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k}}}{\frac{\sum_{k=1}^8 2^{-k} - \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} + \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k}}{\sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k} (\sum_{k=1}^8 2^{-k} - \sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k})}} V_r \\ &= \frac{\sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k}}{\sum_{k=1}^8 2^{-k}} V_r = \frac{\sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k}}{1 - 2^{-8}} V_r \end{aligned} \quad (138)$$

$$U_o(N) = \frac{\sum_{k=1}^8 b_k 2^{-k}}{1 - 2^{-8}} V_r \quad (139)$$

$$U_o(00|_H) = \frac{\sum_{k=1}^8 0 \cdot 2^{-k}}{1 - 2^{-8}} V_r = 0 V \quad (140)$$

$$U_o(FF|_H) = \frac{\sum_{k=1}^8 1 \cdot 2^{-k}}{1-2^{-8}} V_r = \frac{1-2^{-8}}{1-2^{-8}} V_r = 10 V \quad (141)$$

Domeniul tensiunii de ieșire este $[0, 10] V$. Convertorul este unipolar deoarece tensiunea de ieșire nu schimbă semnul în domeniul din care aceasta poate lua valori.

Se observă în plus că acesta este singurul convertor din cele prezentate până acum pentru care tensiunea de ieșire poate fi egală cu tensiunea de referință.

Rezoluția convertorului este:

$$\delta = |U_o(01|_H) - U_o(00|_H)| = \left| \frac{2^{-8}}{1-2^{-8}} V_r - 0 \right| = 39,216 mV \quad (142)$$

b) Tensiunea de ieșire a convertorului variază în trepte în cazul ideal în care nu există în circuit elemente parazite, similar cu situația prezentată în cadrul problemei 1.15. Se cunoaște faptul că un condensator nu admite salt de tensiune asupra sa (tensiunea pe condensator este întotdeauna o formă de undă continuă), deci, dacă între nodul de ieșire și masă se consideră un condensator (C_p), tensiunea de ieșire nu mai poate varia în trepte. Pentru a înțelege fenomenul, să considerăm că numărul aplicat convertorului este $N=0$. Astfel tensiunea de ieșire este zero, așa cum s-a arătat, condensatorul este descărcat, toate rezistențele sunt legate între borna de ieșire și masă. La un moment dat se aplică un număr N diferit de zero convertorului. Rezistoarele corespunzătoare biților egali cu 1 vor fi legate între borna de ieșire și tensiunea de referință, schema devenind următoarea:

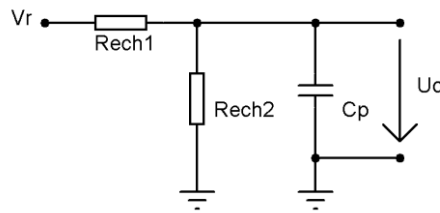


Fig. 35. Schema echivalentă a convertorului considerând și condensatorul din nodul de ieșire.

Se dorește determinarea legii de variație a tensiunii de ieșire U_o . Pentru aceasta se poate redesena circuitul format din sursa de tensiune V_r și cele două rezistențe R_{ech1} și R_{ech2} ca echivalentul Thévenin (față de borna de ieșire și masă) format dintr-o sursă de tensiune V_{Th} înseriată cu o rezistență R_{Th} . V_{Th} este tensiunea dată în gol de circuitul de echivalat. În cazul de față, pentru obținerea condiției de gol, se elimină condensatorul C_p . Așadar:

$$V_{Th} = \frac{R_{ech2}}{R_{ech1} + R_{ech2}} V_r \quad (143)$$

Pentru determinarea rezistenței R_{Th} se pasivizează sursa de tensiune și se determină rezistența văzută între cele două borne față de care se face echivalarea (în cazul de față borna de ieșire și masă). Sursa de tensiune (nedeșenată în text. Este conectată, între V_r și masă) se pasivizează ca scurt-circuit, deci rezistența văzută între bornele amintite va fi:

$$R_{Th} = R_{ech1} \parallel R_{ech2} \quad (144)$$

Schema echivalentă devine:

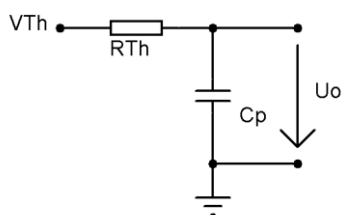


Fig. 36. Circuitul echivalent Thévenin pentru schema din Fig. 35.

Revenind, începând cu momentul comutării variația tensiunii de ieșire va fi descrisă de încărcarea condensatorului C_p (inițial descărcat) de la sursa V_{Th} prin rezistența R_{Th} :

$$U_o(t) = V_{Th} \left(1 - e^{\frac{-t}{R_{Th} C_p}} \right) \quad (145)$$

Se observă acum faptul că tensiunea de ieșire nu va varia ca o funcție treaptă, ci după o lege exponențială. Este important să se observe că V_{Th} este exact $U_o(N)$, așadar este și el funcție de N . Deci convertorul nu va da la ieșire brusc valoarea $U_o(N)$ în momentul aplicării numărului N , ci tensiunea de ieșire va tinde către $U_o(N)$ după legea exponențială descrisă mai sus. Această lege de variație este caracterizată de o mărime numită constantă de timp:

$$\tau = R_{Th} \cdot C_p \quad (146)$$

Cu cât constanta de timp are valoare mai mare, cu atât va dura mai mult timp ca tensiunea de ieșire să ajungă la valoarea determinată de un nou număr N aplicat convertorului (timpul de răspuns al convertorului crește). Se observă că τ crește cu C_p , iar la R_{Th} nu se poate interveni deoarece este determinat de rezistențele cu care este realizat convertorul. Iată de ce se pune problema determinării unei valori maxime acceptate pentru τ , deci pentru C_p .

Deoarece tensiunea de ieșire va atinge tensiunea țintă (adică V_{Th} sau, echivalent, $U_o(N)$ în cazul ideal, fără condensator) când timpul tinde la infinit, mai trebuie specificat când se consideră că tensiunea de ieșire este suficient de apropiată de tensiunea țintă ca ele să fie considerate egale și conversia să se considere încheiată. Conversia se consideră încheiată când diferența dintre tensiunea de ieșire și tensiunea țintă este mai mică decât jumătate din rezoluția convertorului. E important de observat că această limită nu depinde de tensiunea țintă.

În continuare sunt prezentate două variații ale tensiunii pentru tensiunile țintă (V_{Th}) 10 V și 5 V, în condițiile alese pentru simplitate $R_{Th}=10 \text{ k}\Omega$ și $C_p=100 \text{ }\mu\text{F}$. S-a considerat că inițial convertorului îi este aplicat numărul $N_{init}=0$.

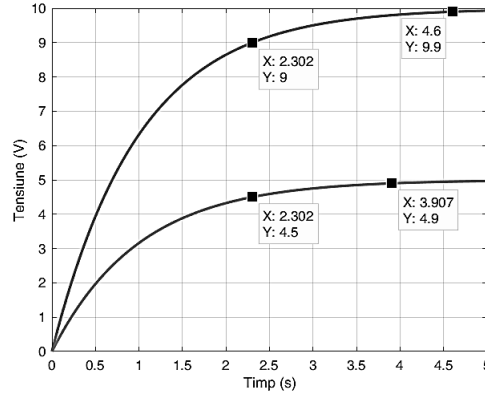


Fig. 37. Evoluția încărcării unui condensator de 100 μF printr-o rezistență de 10 $\text{k}\Omega$ la o tensiune de 5 V, respectiv la o tensiune de 10 V.

Se observă că, dacă limita impusă ar fi dependentă de tensiunea țintă, atunci condiția din care să rezulte C_p ar fi putut fi pusă pentru orice salt (orice combinație de numere aplicate la intrare, primul determinând valoarea inițială a tensiunii de ieșire, iar cel de-al doilea valoarea finală) deoarece toate curbele ating limita impusă astfel după același interval de timp, deci, nu există un caz cel mai defavorabil care să fie tratat. Mai sus, de exemplu, deși salturile sunt de 5 V, respectiv 10 V ambele grafice trec prin $V_{\text{Th}} - 10\% \cdot V_{\text{Th}}$ (adică $5 - \frac{10}{100} 5 = 4.5 \text{ V}$ respectiv $10 - \frac{10}{100} 10 = 9 \text{ V}$) după 2,302 secunde.

În schimb, dacă limita nu este dependentă de tensiunea țintă, se observă că timpul de conversie este mai scurt cu cât saltul de tensiune este mai mic. În exemplul de mai sus s-a considerat și limita de 100 mV față de tensiunea țintă (4.9 V respectiv 9.9 V). Se observă că, dacă saltul este de 5 V, timpul de conversie este 3,907 secunde, pe când, dacă saltul este de 10 V, timpul de conversie este 4,6 secunde. Așadar există un caz cel mai defavorabil și anume acela în care saltul de tensiune de la ieșirea convertorului este cel mai mare (se asigură astfel că toți timpii de conversie pentru salturi mai mici vor fi mai scurți în condițiile aceluiași C_p așa cum se vede în graficul de mai sus). Este clar că, în cazul de față, cel mai defavorabil caz este cel în care convertorul se află în starea determinată de $N=0$ și i se aplică la intrare $N=255|_D$ (cel mai mare număr aplicabil convertorului de față).

Reluând: conversia se consideră încheiată când diferența dintre tensiunea de ieșire și tensiunea țintă este mai mică decât jumătate din rezoluția convertorului. Se poate scrie relația:

$$|U_o(t_{\text{răspuns}}) - U_o(N)| \leq \frac{\delta}{2} \quad (147)$$

Se va trata cazul cel mai defavorabil: stare inițială $N=0$ (ce implică condensator descărcat și toate rezistențele conectate între borna de ieșire și masă), stare finală $N=255|_D$ (ce implică toate rezistențele conectate între borna de ieșire și tensiunea de referință). Așadar condensatorul se va încărca prin toate rezistențele conectate în paralel.

$$R_{ech1}(11111111|_B) = \frac{R}{2} \frac{1}{\sum_{k=1}^8 1 \cdot 2^{-k}} \cong \frac{R}{2} \quad (148)$$

$$R_{ech2}(11111111|_B) = R_{ech2} = \frac{R}{2} \frac{1}{\sum_{k=1}^8 2^{-k} - \sum_{k=1}^8 1 \cdot 2^{-k}} \rightarrow \infty \quad (149)$$

$$R_{Th} = R_{ech1} \parallel R_{ech2} \cong \frac{R}{2} \quad (150)$$

S-a amintit mai sus faptul că V_{Th} este exact $U_o(N)$, iar $V_{Th}=U_o(N=255|_D)$ s-a arătat că este 10 V la punctul a). Există relația:

$$t_{răspuns} = t_{conversie} - t_{comutare} = 400 \mu s \quad (151)$$

Rezultă:

$$\left| V_{Th} \left(1 - e^{\frac{-t_{răspuns}}{R_{Th} \cdot C_p}} \right) - V_{Th} \right| \leq \frac{\delta}{2} \Rightarrow e^{\frac{-t_{răspuns}}{R_{Th} \cdot C_p}} \leq \frac{\delta}{2 \cdot V_{Th}} \xrightarrow{\ln} \frac{-t_{răspuns}}{R_{Th} \cdot C_p} \leq \ln \left(\frac{\delta}{2 \cdot V_{Th}} \right) \quad (152)$$

$$-\frac{R_{Th} \cdot C_p}{t_{răspuns}} \geq \frac{1}{\ln \left(\frac{\delta}{2 \cdot V_{Th}} \right)} \Leftrightarrow \frac{R_{Th} \cdot C_p}{t_{răspuns}} \leq -\frac{1}{\ln \left(\frac{\delta}{2 \cdot V_{Th}} \right)} \Leftrightarrow C_p \leq -\frac{t_{răspuns}}{R_{Th} \cdot \ln \left(\frac{\delta}{2 \cdot V_{Th}} \right)} \Leftrightarrow C_p \leq 12,83 \text{ nF} \quad (153)$$

Problema 1.22. Se dă CAN-ul Flash pe 2 biți din Fig. 38. Se cunosc $V_R=4 \text{ V}$ și $V_{in}=1,4 \text{ V}$.

- Să se obțină codul de la ieșirea comparatoarelor (A, B, C).
- Dat fiind circuitul de decodificare din figură, să se găsească expresiile logice pentru biții S_0, S_1 (S_1 este MSB) în funcție de valorile A, B și C.
- Să se calculeze numărul N pentru cazul particular dat (N este ieșirea CAN-ului).
- Să se reprezinte caracteristica de transfer ($N(V_{in})$) a circuitului.
- Să se precizeze tipul caracteristicii: cu trunchiere sau cu rotunjire.

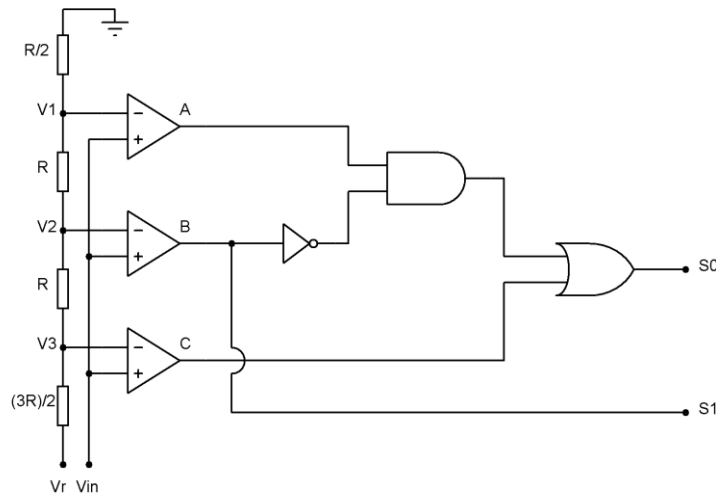


Fig. 38. Schema convertorului analog-numeric de analizat.

Rezolvare:

a) Circuitul conține o rețea de rezistențe, de la masă până la V_R , ce formează divizoare de tensiune prin care se determină potențialele de pe bornele inversoare ale comparatoarelor V_1, V_2, V_3 . Pentru a putea determina comportamentul comparatoarelor vom calcula potențialele V_1, V_2, V_3 .

Știind că în intrările amplificatoarelor operaționale ideale nu curge curent, schema echivalentă pentru calculul potențialului V_1 devine cea din Fig. 39, adică un simplu divizor de tensiune rezistiv:

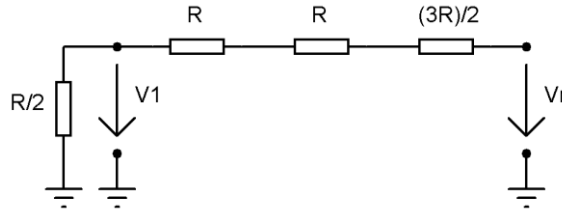


Fig. 39. Schema pentru determinarea potențialului V_1 .

$$V_1 = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R}{2} + R + R + \frac{3R}{2}} \cdot V_R \Rightarrow V_1 = \frac{\frac{R}{2}}{R(\frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{2})} \cdot V_R = \frac{\frac{1}{2}}{4} \cdot V_R \Rightarrow V_1 = \frac{V_R}{8} \Rightarrow V_1 = \frac{4}{8} = 0,5 \text{ V} \quad (154)$$

Similar, schema echivalentă pentru calculul potențialului V_2 este:

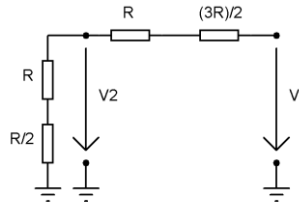


Fig. 40. Schema pentru determinarea potențialului V_2 .

$$V_2 = \frac{\frac{R}{2} + R}{\frac{R}{2} + R + R + \frac{3R}{2}} \cdot V_R \Rightarrow V_2 = \frac{R(\frac{1}{2} + 1)}{4R} \cdot V_R = \frac{3}{8} \cdot V_R \Rightarrow V_2 = \frac{3}{8} \cdot 4 = 1,5 \text{ V} \quad (155)$$

Schema echivalentă pentru calculul potențialului V_3 este:

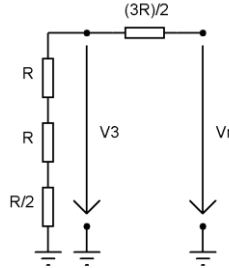


Fig. 41. Schema pentru determinarea potențialului V_3 .

$$V_3 = \frac{\frac{R}{2} + R + R}{\frac{R}{2} + R + R + \frac{3R}{2}} \cdot V_R \Rightarrow V_3 = \frac{R(\frac{1}{2} + 1 + 1)}{4R} \cdot V_R = \frac{5}{8} \cdot V_R \Rightarrow V_3 = \frac{5}{8} \cdot 4 = 2,5 \text{ V} \quad (156)$$

Se cunoaște faptul că ieșirea unui comparator ideal va fi „1” logic dacă diferența de potențial dintre intrarea neînversoare (notată cu „+”) și intrarea inversoare (notată cu „-”) este mai mare sau egală cu 0. Altfel va fi „0” logic dacă diferența de potențial menționată mai sus este mai mică decât 0.

$$\text{Pentru punctul A rezultă: } V_{in} - V_1 = 1,4 \text{ V} - 0,5 \text{ V} = 0,9 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow A = 1 \quad (157)$$

$$\text{Pentru punctul B rezultă: } V_{in} - V_2 = 1,4 \text{ V} - 1,5 \text{ V} = -0,1 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow B = 0 \quad (158)$$

$$\text{Pentru punctul C rezultă: } V_{in} - V_3 = 1,4 \text{ V} - 2,5 \text{ V} = -1,1 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow C = 0 \quad (159)$$

b) Circuitul de decodificare este prezentat în Fig. 42:

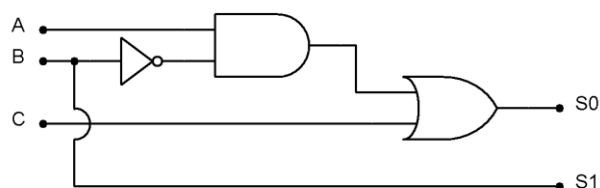


Fig. 42. Circuitul de decodificare pentru convertorul analizat.

Tabelele de adevăr pentru funcțiile logice implicate în circuitul de mai sus sunt următoarele:

Poarta logică ȘI:			Poarta logică SAU:			Porta logică inversoare:	
Intrare		Ieșire	Intrare		Ieșire	A	$\bar{A}$
A	B	$A \cdot B$	A	B	$A + B$	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1		
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		

Tabelul 11. Tabelele de adevăr pentru funcțiile logice care fac parte din circuitul de decodificare.

Conform schemei din Fig. 42, relațiile pentru biții S_0 și S_1 sunt:

$$S_0 = C + A \cdot \bar{B} \quad (160)$$

$$S_1 = B \quad (161)$$

c) La punctul a) s-au determinat valorile $A=1$, $B=0$, $C=0$ pentru tensiunea de intrare dată. Folosind relațiile (160), (161) se determină valorile biților S_0 și S_1 astfel:

$$S_0 = C + A \cdot \bar{B} = 0 + 1 \cdot \bar{0} = 0 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1. \quad (162)$$

$$S_1 = B = 0. \quad (163)$$

$$S_1 \text{ fiind MSB, } S_0 \text{ fiind LSB rezultă } N = \frac{S_0 \cdot 2^0 + S_1 \cdot 2^1}{2^2} \Rightarrow N = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{4} \Rightarrow N = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 \quad (164)$$

d) Determinarea caracteristicii de transfer a convertorului înseamnă găsirea corespondenței dintre valoarea tensiunii de intrare și numărul de la ieșirea convertorului. Tensiunea de intrare, teoretic, poate lua orice valori. Deoarece numărul de ieșire este format din 2 biți, există numai 4 intervale de interes ale tensiunii de intrare, intervale determinate de pragurile găsite la punctul a), adică $V_{in} < \frac{V_R}{8}$, $V_{in} \in \left[\frac{V_R}{8}, \frac{3 \cdot V_R}{8} \right)$, $V_{in} \in \left[\frac{3 \cdot V_R}{8}, \frac{5 \cdot V_R}{8} \right)$ și $V_{in} \geq \frac{5 \cdot V_R}{8}$.

Pentru a determina ieșirea convertorului când tensiunea de intrare este mai mică decât $\frac{V_R}{8}$ se alege o valoare din interval (de exemplu $\frac{V_R}{16} = \frac{4}{16} = 0,25 \text{ V}$) și se determină inițial valorile A , B , C , iar apoi, pe baza acestora, valorile biților S_0 , S_1 .

$$V_{in} < \frac{V_R}{8} \rightarrow \frac{V_R}{16} = \frac{4}{16} = 0,25 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} A: 0,25 \text{ V} - 0,5 \text{ V} = -0,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow A = 0 \\ B: 0,25 \text{ V} - 1,5 \text{ V} = -1,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow B = 0 \\ C: 0,25 \text{ V} - 2,5 \text{ V} = -2,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow C = 0 \end{cases}$$

Conform relației (160), bitul $S_0 = 0 + 0 \cdot \bar{0} = 0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0$. (165)

Conform relației (161), bitul $S_1 = 0$. (166)

$$\left[\frac{V_R}{8}, \frac{3 \cdot V_R}{8} \right) \rightarrow \frac{2 \cdot V_R}{8} = \frac{8}{8} = 1 V \Rightarrow \begin{cases} A: 1 V - 0,5 V = 0,5 V > 0 V \Rightarrow A = 1 \\ B: 1 V - 1,5 V = -0,25 V < 0 V \Rightarrow B = 0 \\ C: 1 V - 2,5 V = -1,25 V < 0 V \Rightarrow C = 0 \end{cases}$$

Conform relației (160), bitul $S_0 = 0 + 1 \cdot \bar{0} = 0 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1$. (167)

Conform relației (161), bitul $S_1 = 0$. (168)

$$\left[\frac{3 \cdot V_R}{8}, \frac{5 \cdot V_R}{8} \right) \rightarrow \frac{4 \cdot V_R}{8} = \frac{16}{8} = 2 V \Rightarrow \begin{cases} A: 2 V - 0,5 V = 1,5 V > 0 V \Rightarrow A = 1 \\ B: 2 V - 1,5 V = 0,5 V > 0 V \Rightarrow B = 1 \\ C: 2 V - 2,5 V = -0,25 V < 0 V \Rightarrow C = 0 \end{cases}$$

Conform relației (160), bitul $S_0 = 0 + 1 \cdot \bar{1} = 0 + 1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$. (169)

Conform relației (161), bitul $S_1 = 1$. (170)

$$V_{in} \geq \frac{5 \cdot V_R}{8} \rightarrow \frac{6 \cdot V_R}{8} = \frac{24}{8} = 3 V \Rightarrow \begin{cases} A: 3 V - 0,5 V = 2,5 V > 0 V \Rightarrow A = 1 \\ B: 3 V - 1,5 V = 1,5 V > 0 V \Rightarrow B = 1 \\ C: 3 V - 2,5 V = 0,5 V > 0 V \Rightarrow C = 1 \end{cases}$$

Conform relației (160), bitul $S_0 = 1 + 1 \cdot \bar{1} = 0 + 1 \cdot 0 = 1 + 0 = 1$. (171)

Conform relației (161), bitul $S_1 = 1$. (172)

V_{in}	$S_1 S_0$
$< \frac{V_R}{8}$	00
$\left[\frac{V_R}{8}, \frac{3 \cdot V_R}{8} \right)$	01
$\left[\frac{3 \cdot V_R}{8}, \frac{5 \cdot V_R}{8} \right)$	10
$\geq \frac{5 \cdot V_R}{8}$	11

Tabelul 12. Corespondența dintre valoarea tensiunii de intrare și numărul de la ieșirea convertorului.

Caracteristica de transfer este prezentată în Fig. 43:

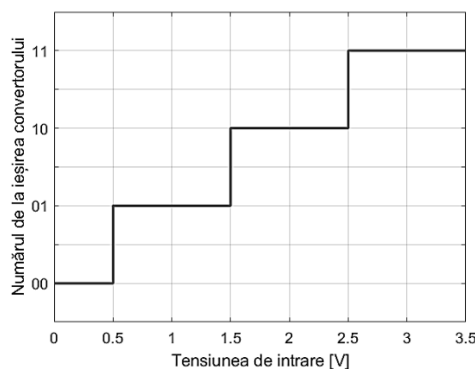


Fig. 43. Caracteristica de transfer a convertorului analog-numeric.

e) Se poate observa în Fig. 43 că variația minimă a tensiunii de intrare care asigură modificarea valorii numărului de la ieșirea convertorului este 1 V, adică $V_{LSB}=1$ V. Tranzițiile numărului de ieșire au loc când tensiunea de intrare atinge valori egale cu $k \cdot V_{LSB} + V_{LSB}/2$, k fiind un număr întreg, deci caracteristica este una cu rotunjire.

Problema 1.23. Se dă CAN-ul Flash pe 2 biți din figură. Se cunosc $V_R=4$ V și $V_{in}=1,4$ V.

- Să se obțină codul de la ieșirea comparatoarelor (A, B, C, D, E, F, G).
- Dat fiind circuitul de decodificare din figură, să se găsească expresiile logice pentru biții S_0, S_1, S_2 (S_2 este MSB).
- Să se calculeze numărul N pentru cazul particular dat (N este ieșirea CAN-ului).
- Să se reprezinte caracteristica de transfer a circuitului.
- Să se precizeze tipul caracteristicii: cu trunchiere sau cu rotunjire.

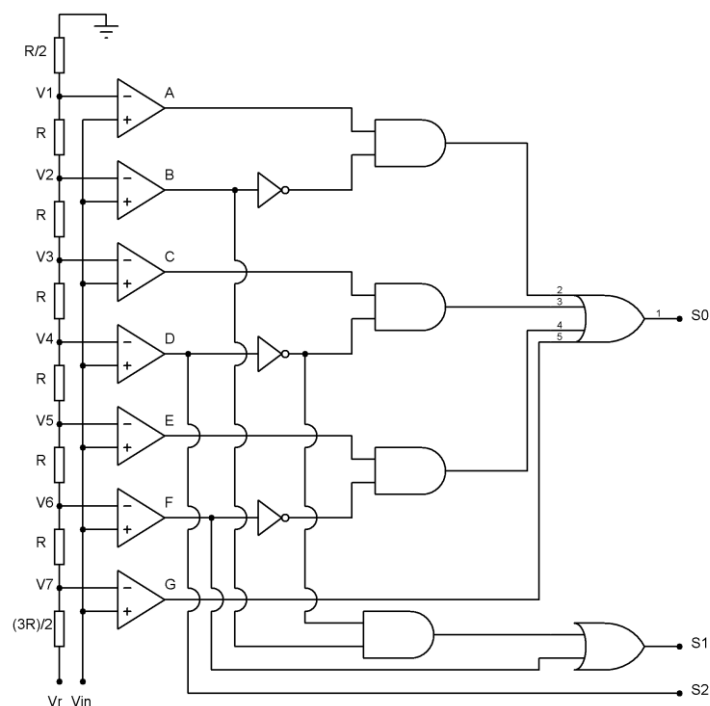


Fig. 44. Schema convertorului analog-numeric de analizat.

Rezolvare:

a) Circuitul conține o rețea de rezistențe, de la masă până la V_R , ce formează divizoare de tensiune prin care se determină potențialele de pe bornele inversoare ale comparatoarelor $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7$. Pentru a putea determina comportamentul comparatoarelor vom calcula potențialele $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7$.

Similar problemei anterioare se vor calcula potențialele:

$$V_1 = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R}{2} + 6 \cdot R + \frac{3R}{2}} \cdot V_R \Rightarrow V_1 = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{4R}{2} + 6 \cdot R} \cdot V_R = \frac{\frac{R}{2}}{8 \cdot R} \cdot V_R \Rightarrow V_1 = \frac{1}{16} \cdot V_R = \frac{4}{16} = 0,25 \text{ V} \quad (173)$$

$$V_2 = \frac{\frac{R}{2} + R}{\frac{R}{2} + 6 \cdot R + \frac{3R}{2}} \cdot V_R \Rightarrow V_2 = \frac{\frac{3R}{2}}{8 \cdot R} \cdot V_R \Rightarrow V_2 = \frac{3}{16} \cdot V_R = \frac{12}{16} = 0,75 \text{ V} \quad (174)$$

$$V_3 = \frac{\frac{R}{2} + R + R}{\frac{R}{2} + 6 \cdot R + \frac{3 \cdot R}{2}} \cdot V_R \Rightarrow V_3 = \frac{\frac{5 \cdot R}{2}}{8 \cdot R} \cdot V_R \Rightarrow V_3 = \frac{5}{16} \cdot V_R = \frac{20}{16} = 1,25 \text{ V} \quad (175)$$

$$V_4 = \frac{\frac{R}{2} + R + R + R}{\frac{R}{2} + 6 \cdot R + \frac{3 \cdot R}{2}} \cdot V_R \Rightarrow V_4 = \frac{\frac{7 \cdot R}{2}}{8 \cdot R} \cdot V_R \Rightarrow V_4 = \frac{7}{16} \cdot V_R = \frac{28}{16} = 1,75 \text{ V} \quad (176)$$

$$V_5 = \frac{\frac{R}{2} + R + R + R + R}{\frac{R}{2} + 6 \cdot R + \frac{3 \cdot R}{2}} \cdot V_R \Rightarrow V_5 = \frac{\frac{9 \cdot R}{2}}{8 \cdot R} \cdot V_R \Rightarrow V_5 = \frac{9}{16} \cdot V_R = \frac{36}{16} = 2,25 \text{ V} \quad (177)$$

$$V_6 = \frac{\frac{R}{2} + R + R + R + R + R}{\frac{R}{2} + 6 \cdot R + \frac{3 \cdot R}{2}} \cdot V_R \Rightarrow V_6 = \frac{\frac{11 \cdot R}{2}}{8 \cdot R} \cdot V_R \Rightarrow V_6 = \frac{11}{16} \cdot V_R = \frac{44}{16} = 2,75 \text{ V} \quad (178)$$

$$V_7 = \frac{\frac{R}{2} + R + R + R + R + R + R}{\frac{R}{2} + 6 \cdot R + \frac{3 \cdot R}{2}} \cdot V_R \Rightarrow V_7 = \frac{\frac{13 \cdot R}{2}}{8 \cdot R} \cdot V_R \Rightarrow V_7 = \frac{13}{16} \cdot V_R = \frac{52}{16} = 3,25 \text{ V} \quad (179)$$

Similar problemei anterioare se va determina comportamentul comparatoarelor:

$$\text{Pentru punctul A rezultă: } V_{in} - V_1 = 1,4 \text{ V} - 0,25 \text{ V} = 1,15 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow A = 1 \quad (180)$$

$$\text{Pentru punctul B rezultă: } V_{in} - V_2 = 1,4 \text{ V} - 0,75 \text{ V} = 0,65 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow B = 1 \quad (181)$$

$$\text{Pentru punctul C rezultă: } V_{in} - V_3 = 1,4 \text{ V} - 1,25 \text{ V} = 0,15 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow C = 1 \quad (182)$$

$$\text{Pentru punctul D rezultă: } V_{in} - V_4 = 1,4 \text{ V} - 1,75 \text{ V} = -0,35 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow D = 0 \quad (183)$$

$$\text{Pentru punctul E rezultă: } V_{in} - V_5 = 1,4 \text{ V} - 2,25 \text{ V} = -0,85 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow E = 0 \quad (184)$$

$$\text{Pentru punctul F rezultă: } V_{in} - V_6 = 1,4 \text{ V} - 2,75 \text{ V} = -1,35 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow F = 0 \quad (185)$$

$$\text{Pentru punctul G rezultă: } V_{in} - V_7 = 1,4 \text{ V} - 3,25 \text{ V} = -1,85 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow G = 0 \quad (186)$$

b) Circuitul de decodificare este prezentat în Fig. 45:

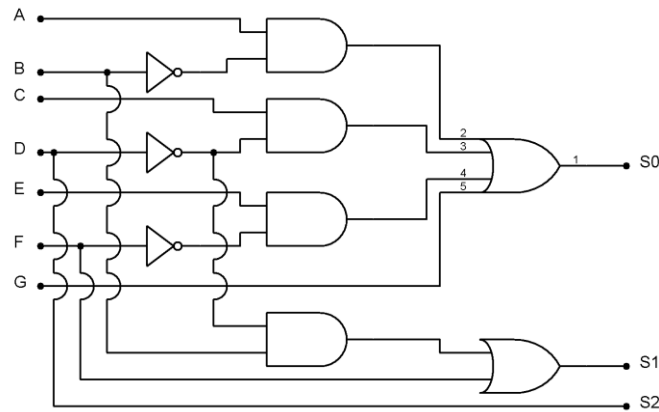


Fig. 45. Circuitul de decodificare pentru convertorul analizat.

Conform schemei din Fig. 45. relațiile pentru biții S_0 , S_1 și S_2 sunt:

$$S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G \quad (187)$$

$$S_1 = B \cdot \bar{D} + F \quad (188)$$

$$S_2 = D \quad (189)$$

c) La punctul a) s-au determinat valorile $A=1, B=1, C=1, D=0, E=0, F=0, G=0$ pentru tensiunea de intrare dată. Folosind relațiile (187), (188), (189) se determină valorile biților S_0, S_1 și S_2 astfel:

$$S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 1 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 = 0 + 1 + 0 + 0 = 1 + 0 = 1. \quad (190)$$

$$S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 1 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 1 + 0 = 1 + 0 = 1. \quad (191)$$

$$S_2 = D = 0. \quad (192)$$

$$S_2 \text{ fiind MSB, } S_0 \text{ fiind LSB rezultă } N = \frac{S_0 \cdot 2^0 + S_1 \cdot 2^1 + S_2 \cdot 2^2}{2^3} \Rightarrow N = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4}{8} \Rightarrow N = \frac{1+2}{8} = \frac{3}{8} \quad (193)$$

d) Determinarea caracteristicii de transfer a convertorului înseamnă găsirea corespondenței dintre valoarea tensiunii de intrare și numărul de la ieșirea convertorului. Tensiunea de intrare, teoretic, poate lua orice valori. Deoarece numărul de ieșire este format din 3 biți, există numai 8 intervale de interes ale tensiunii de intrare, intervale determinate de pragurile găsite la punctul a), adică $V_{in} < \frac{V_R}{16}$, $V_{in} \in \left[\frac{V_R}{16}, \frac{3 \cdot V_R}{16}\right)$, $V_{in} \in \left[\frac{3 \cdot V_R}{16}, \frac{5 \cdot V_R}{16}\right)$, $V_{in} \in \left[\frac{5 \cdot V_R}{16}, \frac{7 \cdot V_R}{16}\right)$, $V_{in} \in \left[\frac{7 \cdot V_R}{16}, \frac{9 \cdot V_R}{16}\right)$, $V_{in} \in \left[\frac{9 \cdot V_R}{16}, \frac{11 \cdot V_R}{16}\right)$, $V_{in} \in \left[\frac{11 \cdot V_R}{16}, \frac{13 \cdot V_R}{16}\right)$ și $V_{in} \geq \frac{13 \cdot V_R}{16}$.

$$V_{in} < \frac{V_R}{16} \rightarrow \frac{V_R}{32} = \frac{4}{32} = 0,125 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} A: 0,125 \text{ V} - 0,25 \text{ V} = -0,125 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow A = 0 \\ B: 0,125 \text{ V} - 0,75 \text{ V} = -0,625 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow B = 0 \\ C: 0,125 \text{ V} - 1,25 \text{ V} = -1,125 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow C = 0 \\ D: 0,125 \text{ V} - 1,75 \text{ V} = -1,625 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow D = 0 \\ E: 0,125 \text{ V} - 2,25 \text{ V} = -2,125 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow E = 0 \\ F: 0,125 \text{ V} - 2,75 \text{ V} = -2,625 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow F = 0 \\ G: 0,125 \text{ V} - 3,25 \text{ V} = -3,125 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow G = 0 \end{cases}$$

Conform relației (187), bitul $S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 0 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{0} + 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0. \quad (194)$

Conform relației (188), bitul $S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 0 \cdot \bar{0} + 0 = 0 \cdot 1 + 0 = 0 + 0 = 0. \quad (195)$

Conform relației (189), bitul $S_2 = 0. \quad (196)$

$$\left[\frac{V_R}{16}, \frac{3 \cdot V_R}{16}\right) \rightarrow \frac{2 \cdot V_R}{16} = \frac{8}{16} = 0,5 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} A: 0,5 \text{ V} - 0,25 \text{ V} = 0,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow A = 1 \\ B: 0,5 \text{ V} - 0,75 \text{ V} = -0,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow B = 0 \\ C: 0,5 \text{ V} - 1,25 \text{ V} = -0,75 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow C = 0 \\ D: 0,5 \text{ V} - 1,75 \text{ V} = -1,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow D = 0 \\ E: 0,5 \text{ V} - 2,25 \text{ V} = -1,75 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow E = 0 \\ F: 0,5 \text{ V} - 2,75 \text{ V} = -2,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow F = 0 \\ G: 0,5 \text{ V} - 3,25 \text{ V} = -2,75 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow G = 0 \end{cases}$$

Conform relației (187), bitul $S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 1 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 = 1 + 0 + 0 + 0 = 1. \quad (197)$

Conform relației (188), bitul $S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 0 \cdot \bar{0} + 0 = 0 \cdot 1 + 0 = 0 + 0 = 0. \quad (198)$

Conform relației (189), bitul $S_2 = 0. \quad (199)$

$$\left[\frac{3 \cdot V_R}{16}, \frac{5 \cdot V_R}{16} \right) \rightarrow \frac{4 \cdot V_R}{16} = \frac{16}{16} = 1 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} A: 1 \text{ V} - 0,25 \text{ V} = 0,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow A = 1 \\ B: 1 \text{ V} - 0,75 \text{ V} = 0,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow B = 1 \\ C: 1 \text{ V} - 1,25 \text{ V} = -0,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow C = 0 \\ D: 1 \text{ V} - 1,75 \text{ V} = -0,75 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow D = 0 \\ E: 1 \text{ V} - 2,25 \text{ V} = -1,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow E = 0 \\ F: 1 \text{ V} - 2,75 \text{ V} = -1,75 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow F = 0 \\ G: 1 \text{ V} - 3,25 \text{ V} = -2,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow G = 0 \end{cases}$$

Conform relației (187), bitul $S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 1 \cdot \bar{1} + 0 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$. (200)

Conform relației (188), bitul $S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 1 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 1 + 0 = 1 + 0 = 1$. (201)

Conform relației (189), bitul $S_2 = 0$. (202)

$$\left[\frac{5 \cdot V_R}{16}, \frac{7 \cdot V_R}{16} \right) \rightarrow \frac{6 \cdot V_R}{16} = \frac{24}{16} = 1,5 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} A: 1,5 \text{ V} - 0,25 \text{ V} = 1,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow A = 1 \\ B: 1,5 \text{ V} - 0,75 \text{ V} = 0,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow B = 1 \\ C: 1,5 \text{ V} - 1,25 \text{ V} = 0,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow C = 1 \\ D: 1,5 \text{ V} - 1,75 \text{ V} = -0,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow D = 0 \\ E: 1,5 \text{ V} - 2,25 \text{ V} = -0,75 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow E = 0 \\ F: 1,5 \text{ V} - 2,75 \text{ V} = -1,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow F = 0 \\ G: 1,5 \text{ V} - 3,25 \text{ V} = -1,75 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow G = 0 \end{cases}$$

Conform relației (187), bitul $S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 1 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 = 0 + 1 + 0 + 0 = 1$. (203)

Conform relației (188), bitul $S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 1 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 1 + 0 = 1 + 0 = 1$. (204)

Conform relației (189), bitul $S_2 = 0$. (205)

$$\left[\frac{7 \cdot V_R}{16}, \frac{9 \cdot V_R}{16} \right) \rightarrow \frac{8 \cdot V_R}{16} = \frac{32}{16} = 2 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} A: 2 \text{ V} - 0,25 \text{ V} = 1,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow A = 1 \\ B: 2 \text{ V} - 0,75 \text{ V} = 1,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow B = 1 \\ C: 2 \text{ V} - 1,25 \text{ V} = 0,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow C = 1 \\ D: 2 \text{ V} - 1,75 \text{ V} = 0,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow D = 1 \\ E: 2 \text{ V} - 2,25 \text{ V} = -0,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow E = 0 \\ F: 2 \text{ V} - 2,75 \text{ V} = -0,75 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow F = 0 \\ G: 2 \text{ V} - 3,25 \text{ V} = -1,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow G = 0 \end{cases}$$

Conform relației (187), bitul $S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 1 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{1} + 0 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$. (206)

Conform relației (188), bitul $S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 1 \cdot \bar{1} + 0 = 1 \cdot 0 + 0 = 0 + 0 = 0$. (207)

Conform relației (189), bitul $S_2 = 1$. (208)

$$\left[\frac{9 \cdot V_R}{16}, \frac{11 \cdot V_R}{16} \right) \rightarrow \frac{10 \cdot V_R}{16} = \frac{40}{16} = 2,5 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} A: 2,5 \text{ V} - 0,25 \text{ V} = 2,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow A = 1 \\ B: 2,5 \text{ V} - 0,75 \text{ V} = 1,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow B = 1 \\ C: 2,5 \text{ V} - 1,25 \text{ V} = 1,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow C = 1 \\ D: 2,5 \text{ V} - 1,75 \text{ V} = 0,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow D = 1 \\ E: 2,5 \text{ V} - 2,25 \text{ V} = 0,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow E = 1 \\ F: 2,5 \text{ V} - 2,75 \text{ V} = -0,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow F = 0 \\ G: 2,5 \text{ V} - 3,25 \text{ V} = -0,75 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow G = 0 \end{cases}$$

Conform relației (187), bitul $S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 1 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 = 0 + 0 + 1 + 0 = 1$. (209)

Conform relației (188), bitul $S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 1 \cdot \bar{1} + 0 = 1 \cdot 0 + 0 = 0 + 0 = 0$. (210)

Conform relației (189), bitul $S_2 = 1$. (211)

$$\left[\frac{11 \cdot V_R}{16}, \frac{13 \cdot V_R}{16} \right) \rightarrow \frac{12 \cdot V_R}{16} = \frac{48}{16} = 3 V \Rightarrow \begin{cases} A: 3 V - 0,25 V = 2,75 V > 0 V \Rightarrow A = 1 \\ B: 3 V - 0,75 V = 2,25 V > 0 V \Rightarrow B = 1 \\ C: 3 V - 1,25 V = 1,75 V > 0 V \Rightarrow C = 1 \\ D: 3 V - 1,75 V = 1,25 V > 0 V \Rightarrow D = 1 \\ E: 3 V - 2,25 V = 0,75 V > 0 V \Rightarrow E = 1 \\ F: 3 V - 2,75 V = 0,25 V > 0 V \Rightarrow F = 1 \\ G: 3 V - 3,25 V = -0,25 V < 0 V \Rightarrow G = 0 \end{cases}$$

Conform relației (187), bitul $S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 1 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{1} + 0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$. (212)

Conform relației (188), bitul $S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 1 \cdot \bar{1} + 1 = 1 \cdot 0 + 0 = 0 + 1 = 1$. (213)

Conform relației (189), bitul $S_2 = 1$. (214)

$$V_{in} \geq \frac{13 \cdot V_R}{16} \rightarrow \frac{14 \cdot V_R}{16} = \frac{56}{16} = 3,5 V \Rightarrow \begin{cases} A: 3,5 V - 0,25 V = 3,25 V > 0 V \Rightarrow A = 1 \\ B: 3,5 V - 0,75 V = 2,75 V > 0 V \Rightarrow B = 1 \\ C: 3,5 V - 1,25 V = 2,25 V > 0 V \Rightarrow C = 1 \\ D: 3,5 V - 1,75 V = 1,75 V > 0 V \Rightarrow D = 1 \\ E: 3,5 V - 2,25 V = 1,25 V > 0 V \Rightarrow E = 1 \\ F: 3,5 V - 2,75 V = 0,75 V > 0 V \Rightarrow F = 1 \\ G: 3,5 V - 3,25 V = 0,25 V > 0 V \Rightarrow G = 1 \end{cases}$$

Conform relației (187), bitul $S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 1 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{1} + 1 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 = 0 + 0 + 0 + 1 = 1$. (215)

Conform relației (188), bitul $S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 1 \cdot \bar{1} + 1 = 1 \cdot 0 + 0 = 0 + 1 = 1$. (216)

Conform relației (189), bitul $S_2 = 1$. (217)

V_{in}	$S_2 S_1 S_0$
$< \frac{V_R}{16}$	000
$\left[\frac{V_R}{16}, \frac{3 \cdot V_R}{16} \right)$	001
$\left[\frac{3 \cdot V_R}{16}, \frac{5 \cdot V_R}{16} \right)$	010
$\left[\frac{5 \cdot V_R}{16}, \frac{7 \cdot V_R}{16} \right)$	011
$\left[\frac{7 \cdot V_R}{16}, \frac{9 \cdot V_R}{16} \right)$	100
$\left[\frac{9 \cdot V_R}{16}, \frac{11 \cdot V_R}{16} \right)$	101
$\left[\frac{11 \cdot V_R}{16}, \frac{13 \cdot V_R}{16} \right)$	110
$\geq \frac{13 \cdot V_R}{16}$	111

Tabelul 13. Corespondența dintre valoarea tensiunii de intrare și numărul de la ieșirea convertorului.

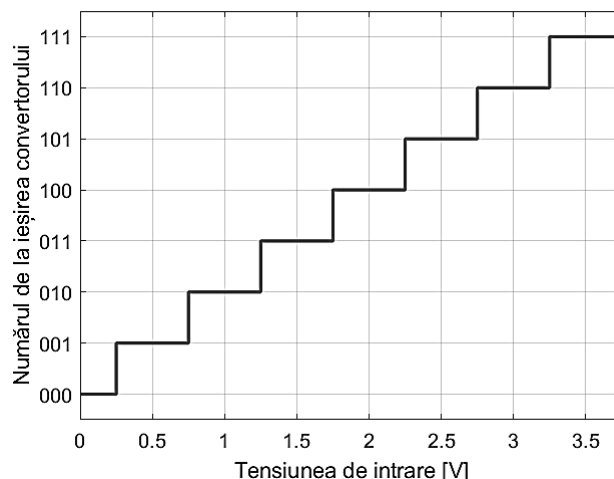


Fig. 46. Caracteristica de transfer a convertorului analog-numeric.

e) Se poate observa în Fig. 46 că variația minimă a tensiunii de intrare care asigură modificarea valorii numărului de la ieșirea convertorului este 0.5 V, adică $V_{LSB}=0.5$ V. Tranzițiile numărului de ieșire au loc când tensiunea de intrare atinge valori egale cu $k \cdot V_{LSB} + V_{LSB}/2$, k fiind un număr întreg, deci caracteristica este una cu rotunjire.

Problema 1.24. Se dă CAN-ul Flash pe 2 biți din figură. Se cunosc $V_R=4$ V și $V_{in}=1,4$ V.

- Să se obțină codul de la ieșirea comparatoarelor (A, B, C, D, E, F, G).
- Dat fiind circuitul de decodificare din figură, să se găsească expresiile logice pentru biții S_0, S_1, S_2 (S_2 este MSB).
- Să se calculeze numărul N pentru cazul particular dat (N este ieșirea CAN-ului).
- Să se reprezinte funcția de transfer a circuitului.
- Să se precizeze tipul caracteristicii: cu trunchiere sau cu rotunjire.

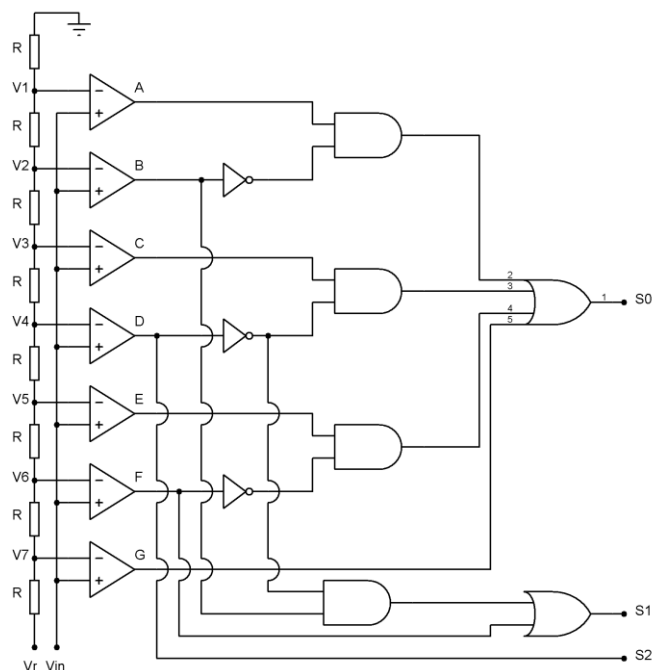


Fig. 47. Schema convertorului analog-numeric de analizat.

Rezolvare:

a) Circuitul conține o rețea de rezistențe, de la masă până la V_R , ce formează divizoare de tensiune prin care se determină potențialele de pe bornele inversoare ale comparatoarelor $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7$. Pentru a putea determina comportamentul comparatoarelor vom calcula potențialele $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7$.

Similar problemei anterioare se vor calcula potențialele:

$$V_1 = \frac{R}{R+6 \cdot R+R} \cdot V_R \Rightarrow V_1 = \frac{R}{8 \cdot R} \cdot V_R \Rightarrow V_1 = \frac{1}{8} \cdot V_R = \frac{4}{8} = 0,5 \text{ V} \quad (218)$$

$$V_2 = \frac{R+R}{R+6 \cdot R+R} \cdot V_R \Rightarrow V_2 = \frac{2 \cdot R}{8 \cdot R} \cdot V_R \Rightarrow V_2 = \frac{2}{8} \cdot V_R = \frac{8}{8} = 1 \text{ V} \quad (219)$$

$$V_3 = \frac{R+R+R}{R+6 \cdot R+R} \cdot V_R \Rightarrow V_3 = \frac{3 \cdot R}{8 \cdot R} \cdot V_R \Rightarrow V_3 = \frac{3}{8} \cdot V_R = \frac{12}{8} = 1,5 \text{ V} \quad (220)$$

$$V_4 = \frac{R+R+R+R}{R+6 \cdot R+R} \cdot V_R \Rightarrow V_4 = \frac{4 \cdot R}{8 \cdot R} \cdot V_R \Rightarrow V_4 = \frac{4}{8} \cdot V_R = \frac{16}{8} = 2 \text{ V} \quad (221)$$

$$V_5 = \frac{R+R+R+R+R}{R+6 \cdot R+R} \cdot V_R \Rightarrow V_5 = \frac{5 \cdot R}{8 \cdot R} \cdot V_R \Rightarrow V_5 = \frac{5}{8} \cdot V_R = \frac{20}{8} = 2,5 \text{ V} \quad (222)$$

$$V_6 = \frac{R+R+R+R+R+R}{R+6 \cdot R+R} \cdot V_R \Rightarrow V_6 = \frac{6 \cdot R}{8 \cdot R} \cdot V_R \Rightarrow V_6 = \frac{6}{8} \cdot V_R = \frac{24}{8} = 3 \text{ V} \quad (223)$$

$$V_7 = \frac{R+R+R+R+R+R+R}{R+6 \cdot R+R} \cdot V_R \Rightarrow V_7 = \frac{7 \cdot R}{8 \cdot R} \cdot V_R \Rightarrow V_7 = \frac{7}{8} \cdot V_R = \frac{28}{8} = 3,5 \text{ V} \quad (224)$$

Similar problemei anterioare se va determina comportamentul comparatoarelor:

$$\text{Pentru punctul A rezultă: } V_{in} - V_1 = 1,4 \text{ V} - 0,5 \text{ V} = 0,9 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow A = 1 \quad (225)$$

$$\text{Pentru punctul B rezultă: } V_{in} - V_2 = 1,4 \text{ V} - 1 \text{ V} = 0,4 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow B = 1 \quad (226)$$

$$\text{Pentru punctul C rezultă: } V_{in} - V_3 = 1,4 \text{ V} - 1,5 \text{ V} = -0,1 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow C = 0 \quad (227)$$

$$\text{Pentru punctul D rezultă: } V_{in} - V_4 = 1,4 \text{ V} - 2 \text{ V} = -0,6 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow D = 0 \quad (228)$$

$$\text{Pentru punctul E rezultă: } V_{in} - V_5 = 1,4 \text{ V} - 2,5 \text{ V} = -1,1 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow E = 0 \quad (229)$$

$$\text{Pentru punctul F rezultă: } V_{in} - V_6 = 1,4 \text{ V} - 3 \text{ V} = -1,6 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow F = 0 \quad (230)$$

$$\text{Pentru punctul G rezultă: } V_{in} - V_7 = 1,4 \text{ V} - 3,5 \text{ V} = -2,1 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow G = 0 \quad (231)$$

b) Circuitul de decodificare este prezentat în Fig. 48:

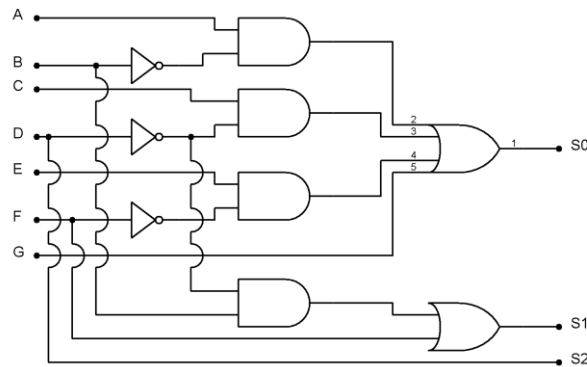


Fig. 48. Circuitul de decodificare pentru convertorul analizat.

Conform schemei din Fig. 48. relațiile pentru biții S_0 , S_1 și S_2 sunt:

$$S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G \quad (232)$$

$$S_1 = B \cdot \bar{D} + F \quad (233)$$

$$S_2 = D \quad (234)$$

c) La punctul a) s-au determinat valorile $A=1$, $B=1$, $C=0$, $D=0$, $E=0$, $F=0$, $G=0$ pentru tensiunea de intrare dată. Folosind relațiile (232), (233), (234) se determină valorile biților S_0 , S_1 și S_2 astfel:

$$S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 1 \cdot \bar{1} + 0 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0. \quad (235)$$

$$S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 1 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 1 + 0 = 1 + 0 = 1. \quad (236)$$

$$S_2 = D = 0. \quad (237)$$

$$S_2 \text{ fiind MSB, } S_0 \text{ fiind LSB rezultă } N = \frac{S_0 \cdot 2^0 + S_1 \cdot 2^1 + S_2 \cdot 2^2}{2^3} \Rightarrow N = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4}{8} \Rightarrow N = \frac{2}{8} = 0,25 \quad (238)$$

d) Determinarea caracteristicii de transfer a convertorului înseamnă găsirea corespondenței dintre valoarea tensiunii de intrare și numărul de la ieșirea convertorului. Tensiunea de intrare, teoretic, poate lua orice valori. Deoarece numărul de ieșire este format din 3 biți, există numai 8 intervale de interes ale tensiunii de intrare, intervale determinate de pragurile găsite la punctul a), adică $V_{in} < \frac{V_R}{8}$, $V_{in} \in \left[\frac{V_R}{8}, \frac{2 \cdot V_R}{8}\right)$, $V_{in} \in \left[\frac{2 \cdot V_R}{8}, \frac{3 \cdot V_R}{8}\right)$, $V_{in} \in \left[\frac{3 \cdot V_R}{8}, \frac{4 \cdot V_R}{8}\right)$, $V_{in} \in \left[\frac{4 \cdot V_R}{8}, \frac{5 \cdot V_R}{8}\right)$, $V_{in} \in \left[\frac{5 \cdot V_R}{8}, \frac{6 \cdot V_R}{8}\right)$, $V_{in} \in \left[\frac{6 \cdot V_R}{8}, \frac{7 \cdot V_R}{8}\right)$ și $V_{in} \geq \frac{7 \cdot V_R}{8}$.

$$V_{in} < \frac{V_R}{8} \rightarrow \frac{V_R}{16} = \frac{4}{16} = 0,25 V \Rightarrow \begin{cases} A: 0,25 V - 0,5 V = -0,25 V < 0 V \Rightarrow A = 0 \\ B: 0,25 V - 1 V = -0,75 V < 0 V \Rightarrow B = 0 \\ C: 0,25 V - 1,5 V = -1,25 V < 0 V \Rightarrow C = 0 \\ D: 0,25 V - 2 V = -1,75 V < 0 V \Rightarrow D = 0 \\ E: 0,25 V - 2,5 V = -2,25 V < 0 V \Rightarrow E = 0 \\ F: 0,25 V - 3 V = -2,75 V < 0 V \Rightarrow F = 0 \\ G: 0,25 V - 3,5 V = -3,25 V < 0 V \Rightarrow G = 0 \end{cases}$$

$$\text{Conform relației (232), bitul } S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 0 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{0} + 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0. \quad (239)$$

$$\text{Conform relației (233), bitul } S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 0 \cdot \bar{0} + 0 = 0 \cdot 1 + 0 = 0 + 0 = 0. \quad (240)$$

$$\text{Conform relației (234), bitul } S_2 = 0. \quad (241)$$

$$\left[\frac{V_R}{8}, \frac{2 \cdot V_R}{8}\right) \rightarrow \frac{1,5 \cdot V_R}{8} = \frac{6}{8} = 0,75 V \Rightarrow \begin{cases} A: 0,75 V - 0,5 V = 0,25 V > 0 V \Rightarrow A = 1 \\ B: 0,75 V - 1 V = -0,25 V < 0 V \Rightarrow B = 0 \\ C: 0,75 V - 1,5 V = -0,75 V < 0 V \Rightarrow C = 0 \\ D: 0,75 V - 2 V = -1,25 V < 0 V \Rightarrow D = 0 \\ E: 0,75 V - 2,5 V = -1,75 V < 0 V \Rightarrow E = 0 \\ F: 0,75 V - 3 V = -2,25 V < 0 V \Rightarrow F = 0 \\ G: 0,75 V - 3,5 V = -2,75 V < 0 V \Rightarrow G = 0 \end{cases}$$

$$\text{Conform relației (232), bitul } S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 1 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 = 1 + 0 + 0 + 0 = 1. \quad (242)$$

Conform relației (233), bitul $S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 0 \cdot \bar{0} + 0 = 0 \cdot 1 + 0 = 0 + 0 = 0$. (243)

Conform relației (234), bitul $S_2 = 0$. (244)

$$\left[\frac{2 \cdot V_R}{8}, \frac{3 \cdot V_R}{8} \right) \rightarrow \frac{2,5 \cdot V_R}{8} = \frac{10}{8} = 1,25 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} A: 1,25 \text{ V} - 0,5 \text{ V} = 0,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow A = 1 \\ B: 1,25 \text{ V} - 1 \text{ V} = 0,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow B = 1 \\ C: 1,25 \text{ V} - 1,5 \text{ V} = -0,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow C = 0 \\ D: 1,25 \text{ V} - 2 \text{ V} = -0,75 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow D = 0 \\ E: 1,25 \text{ V} - 2,5 \text{ V} = -1,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow E = 0 \\ F: 1,25 \text{ V} - 3 \text{ V} = -1,75 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow F = 0 \\ G: 1,25 \text{ V} - 3,5 \text{ V} = -2,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow G = 0 \end{cases}$$

Conform relației (232), bitul $S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 1 \cdot \bar{1} + 0 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$. (245)

Conform relației (233), bitul $S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 1 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 1 + 0 = 1 + 0 = 1$. (246)

Conform relației (234), bitul $S_2 = 0$. (247)

$$\left[\frac{3 \cdot V_R}{8}, \frac{4 \cdot V_R}{8} \right) \rightarrow \frac{3,5 \cdot V_R}{8} = \frac{14}{8} = 1,75 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} A: 1,75 \text{ V} - 0,5 \text{ V} = 1,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow A = 1 \\ B: 1,75 \text{ V} - 1 \text{ V} = 0,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow B = 1 \\ C: 1,75 \text{ V} - 1,5 \text{ V} = 0,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow C = 1 \\ D: 1,75 \text{ V} - 2 \text{ V} = -0,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow D = 0 \\ E: 1,75 \text{ V} - 2,5 \text{ V} = -0,75 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow E = 0 \\ F: 1,75 \text{ V} - 3 \text{ V} = -1,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow F = 0 \\ G: 1,75 \text{ V} - 3,5 \text{ V} = -1,75 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow G = 0 \end{cases}$$

Conform relației (232), bitul $S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 1 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 = 0 + 1 + 0 + 0 = 1$. (248)

Conform relației (233), bitul $S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 1 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 1 + 0 = 1 + 0 = 1$. (249)

Conform relației (234), bitul $S_2 = 0$. (250)

$$\left[\frac{4 \cdot V_R}{8}, \frac{5 \cdot V_R}{8} \right) \rightarrow \frac{4,5 \cdot V_R}{8} = \frac{18}{8} = 2,25 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} A: 2,25 \text{ V} - 0,5 \text{ V} = 1,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow A = 1 \\ B: 2,25 \text{ V} - 1 \text{ V} = 1,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow B = 1 \\ C: 2,25 \text{ V} - 1,5 \text{ V} = 0,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow C = 1 \\ D: 2,25 \text{ V} - 2 \text{ V} = 0,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow D = 1 \\ E: 2,25 \text{ V} - 2,5 \text{ V} = -0,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow E = 0 \\ F: 2,25 \text{ V} - 3 \text{ V} = -0,75 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow F = 0 \\ G: 2,25 \text{ V} - 3,5 \text{ V} = -1,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow G = 0 \end{cases}$$

Conform relației (232), bitul $S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 1 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{1} + 0 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$. (251)

Conform relației (233), bitul $S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 1 \cdot \bar{1} + 0 = 1 \cdot 0 + 0 = 0 + 0 = 0$. (252)

Conform relației (234), bitul $S_2 = 1$. (253)

$$\left[\frac{5 \cdot V_R}{8}, \frac{6 \cdot V_R}{8} \right) \rightarrow \frac{5,5 \cdot V_R}{8} = \frac{22}{8} = 2,75 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} A: 2,75 \text{ V} - 0,5 \text{ V} = 2,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow A = 1 \\ B: 2,75 \text{ V} - 1 \text{ V} = 1,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow B = 1 \\ C: 2,75 \text{ V} - 1,5 \text{ V} = 1,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow C = 1 \\ D: 2,75 \text{ V} - 2 \text{ V} = 0,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow D = 1 \\ E: 2,75 \text{ V} - 2,5 \text{ V} = 0,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow E = 1 \\ F: 2,75 \text{ V} - 3 \text{ V} = -0,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow F = 0 \\ G: 2,75 \text{ V} - 3,5 \text{ V} = -0,75 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow G = 0 \end{cases}$$

Conform relației (232), bitul $S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 1 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{0} + 0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 = 0 + 0 + 1 + 0 = 1$. (254)

Conform relației (233), bitul $S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 1 \cdot \bar{1} + 0 = 1 \cdot 0 + 0 = 0 + 0 = 0$. (255)

Conform relației (234), bitul $S_2 = 1$. (256)

$$\left[\frac{6 \cdot V_R}{8}, \frac{7 \cdot V_R}{8} \right) \rightarrow \frac{6,5 \cdot V_R}{8} = \frac{26}{8} = 3,25 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} A: 3,25 \text{ V} - 0,5 \text{ V} = 2,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow A = 1 \\ B: 3,25 \text{ V} - 1 \text{ V} = 2,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow B = 1 \\ C: 3,25 \text{ V} - 1,5 \text{ V} = 1,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow C = 1 \\ D: 3,25 \text{ V} - 2 \text{ V} = 1,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow D = 1 \\ E: 3,25 \text{ V} - 2,5 \text{ V} = 0,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow E = 1 \\ F: 3,25 \text{ V} - 3 \text{ V} = 0,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow F = 1 \\ G: 3,25 \text{ V} - 3,5 \text{ V} = -0,25 \text{ V} < 0 \text{ V} \Rightarrow G = 0 \end{cases}$$

Conform relației (232), bitul $S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 1 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{1} + 0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$. (257)

Conform relației (233), bitul $S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 1 \cdot \bar{1} + 1 = 1 \cdot 0 + 0 = 0 + 1 = 1$. (258)

Conform relației (234), bitul $S_2 = 1$. (259)

$$V_{in} \geq \frac{7 \cdot V_R}{8} \rightarrow \frac{7,5 \cdot V_R}{8} = \frac{30}{8} = 3,75 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} A: 3,75 \text{ V} - 0,5 \text{ V} = 3,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow A = 1 \\ B: 3,75 \text{ V} - 1 \text{ V} = 2,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow B = 1 \\ C: 3,75 \text{ V} - 1,5 \text{ V} = 2,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow C = 1 \\ D: 3,75 \text{ V} - 2 \text{ V} = 1,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow D = 1 \\ E: 3,75 \text{ V} - 2,5 \text{ V} = 1,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow E = 1 \\ F: 3,75 \text{ V} - 3 \text{ V} = 0,75 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow F = 1 \\ G: 3,75 \text{ V} - 3,5 \text{ V} = 0,25 \text{ V} > 0 \text{ V} \Rightarrow G = 1 \end{cases}$$

Conform relației (232), bitul $S_0 = A \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{F} + G = 1 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{1} + 1 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 = 0 + 0 + 0 + 1 = 1$. (260)

Conform relației (233), bitul $S_1 = B \cdot \bar{D} + F = 1 \cdot \bar{1} + 1 = 1 \cdot 0 + 0 = 0 + 1 = 1$. (261)

Conform relației (234), bitul $S_2 = 1$. (262)

V_{in}	$S_2 S_1 S_0$
$< \frac{V_R}{8}$	000
$\left[\frac{V_R}{8}, \frac{2 \cdot V_R}{8} \right)$	001
$\left[\frac{2 \cdot V_R}{8}, \frac{3 \cdot V_R}{8} \right)$	010
$\left[\frac{3 \cdot V_R}{8}, \frac{4 \cdot V_R}{8} \right)$	011
$\left[\frac{4 \cdot V_R}{8}, \frac{5 \cdot V_R}{8} \right)$	100
$\left[\frac{5 \cdot V_R}{8}, \frac{6 \cdot V_R}{8} \right)$	101
$\left[\frac{6 \cdot V_R}{8}, \frac{7 \cdot V_R}{8} \right)$	110
$\geq \frac{7 \cdot V_R}{8}$	111

Tabelul 14. Corespondența dintre valoarea tensiunii de intrare și numărul de la ieșirea convertorului.

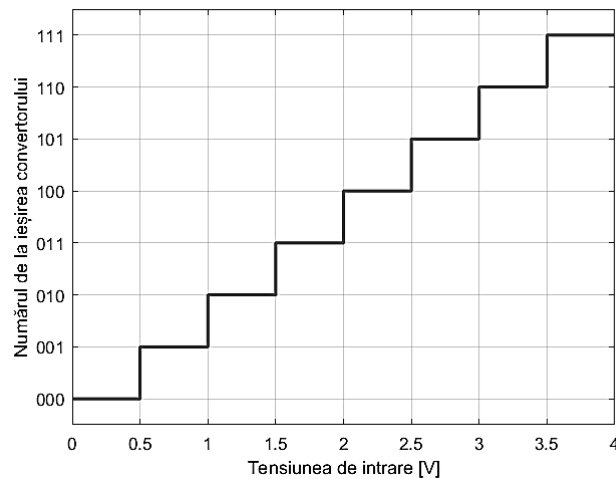


Fig. 49. Caracteristica de transfer a convertorului analog-numeric.

e) Se poate observa în Fig. 49 că variația minimă a tensiunii de intrare care asigură modificarea valorii numărului de la ieșirea convertorului este 0.5 V, adică $V_{LSB}=0.5$ V. Tranzițiile numărului de ieșire au loc când tensiunea de intrare atinge valori egale cu $k \cdot V_{LSB}$, k fiind un număr întreg, deci caracteristica este una cu trunchiere.

Problema 1.25. Un voltmetru de curent continuu cu convertor analog-numeric dublă pantă are timpul de integrare a tensiunii necunoscute $t_i=16,67$ ms. Pentru îmbunătățirea rejecției perturbațiilor alternative se utilizează un filtru trece-jos RC de ordinul 1 cu frecvența de tăiere $f_{-3dB}=5$ Hz. Să se calculeze eroarea maximă și raportul de rejecție serie (RRS) minim în cazul unei tensiuni perturbatoare cu frecvența $f=10$ kHz $\pm 1,6\%$ și amplitudinea $A=10$ V suprapusă peste tensiunea continuă de măsurat.

Rezolvare:

Raportul de rejecție serie este definit ca raportul dintre amplitudinea perturbației alternative de la intrarea convertorului analog-numeric dublă pantă și tensiunea continuă determinată de aceasta, practic un raport între cauză și efect:

$$RRS = \frac{U_{ps}}{U_{c.c. \text{ determinată}}} \quad (263)$$

Pentru perturbația de tip sinusoidal se poate calcula RRS folosind formula (264):

$$RRS = -20 \lg \left(\left| \text{sinc} \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) \right| \right) \quad (264)$$

Valoarea maximă a RRS se obține atunci când argumentul logaritmului este zero:

$$RRS_{max|dB} = -20 \lg \left(\left| \text{sinc} \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) \right| \right) = -20 \lg \left(\left| \frac{\sin(\frac{\omega t_1}{2})}{\frac{\omega t_1}{2}} \right| \right) \xrightarrow{\sin(\frac{\omega t_1}{2})=0} \infty \quad (265)$$

$$\sin \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\omega t_1}{2} = k\pi \Rightarrow \omega = \frac{2k\pi}{t_1} \xrightarrow{\omega=2\pi f} f = \frac{k}{t_1} \cong k \cdot 60 \text{ Hz}, k \in \mathbb{Z} \quad (266)$$

Din relația (266) rezultă faptul că dacă perturbația armonică are frecvența egală cu un multiplu de 60 Hz, RRS va fi infinit. Dacă RRS este infinit, conform relației (263), înseamnă că efectul produs de această perturbație va fi nul. Astfel acest voltmetru poate fi folosit cu performanțe foarte bune în țări în care frecvența rețelei electrice este 60 Hz cum ar fi SUA, Japonia, Mexic etc. O observație foarte importantă este reprezentată de faptul că frecvențele rejectate pot fi alese numai prin fixarea timpului de integrare t_1 .

Valori minime pentru RRS se vor obține în cazul opus față de cel prezentat mai sus, și anume când valoarea $\sin \left(\frac{\omega t_1}{2} \right)$ este maximă, adică 1:

$$RRS_{min|dB} = -20 \lg \left(\left| \text{sinc} \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) \right| \right) = -20 \lg \left(\left| \frac{\sin(\frac{\omega t_1}{2})}{\frac{\omega t_1}{2}} \right| \right) \xrightarrow{\sin(\frac{\omega t_1}{2})=1} -20 \lg \left(\frac{1}{\frac{\omega t_1}{2}} \right) = 20 \lg \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) \quad (267)$$

$$\sin \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) = 1 \Rightarrow \frac{\omega t_1}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = \frac{2k\pi}{t_1} + \frac{\pi}{t_1} \xrightarrow{\omega=2\pi f} f = \frac{k}{t_1} + \frac{1}{2t_1} = k \cdot 60 + 30 \text{ Hz}, k \in \mathbb{Z} \quad (268)$$

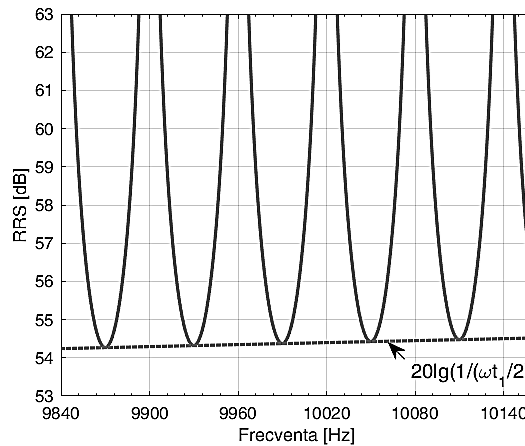


Fig. 50. Variația cu frecvența a RRS exprimat în decibeli (linie continuă). RRS minim (linie punctată).

Se menționează în enunț că se folosește un filtru trece-jos pentru a atenua perturbațiile alternative care pot ajunge la intrarea voltmetrului.

Așadar orice tensiune de măsurat va trece întâi prin filtrul trece-jos, iar de-abia apoi va fi aplicată convertorului analog-numeric dublă pantă. U_{ps} din relația (263) reprezintă amplitudinea tensiunii perturbatoare care ajunge la intrarea convertorului dublă pantă, adică amplitudinea semnalului de la ieșirea filtrului trece-jos. Se va determina U_{ps} folosind funcția de transfer a unui filtru trece-jos de ordinul 1 realizat cu o grupare RC, exprimată în relația (269):

$$H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} \quad (269)$$

Se cunoaște metoda armonică de determinare a răspunsului $y(t)$ al unui sistem caracterizat de funcția de transfer $H(\omega)$ la stimulul armonic $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$:

$$y(t) = A \cdot |H(\omega_0)| \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \arg\{H(\omega_0)\}), \text{ unde } A \cdot |H(\omega_0)| = U_{ps} \quad (270)$$

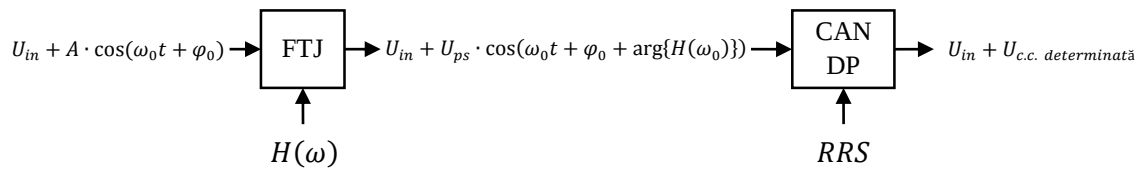


Fig. 51. Lanțul de operații efectuate asupra semnalului de intrare în cazul voltmetrului din problema curentă.

În cazul de față amplitudinea semnalului de intrare este $A=10$ V. Faza inițială φ_0 nu intervine în calculele relevante pentru această problemă. Se observă că atât funcția de transfer cât și RRS depind de frecvența semnalului de intrare. Frecvența semnalului va fi aleasă din gama posibilă astfel încât să se trateze cazul cel mai defavorabil (RRS are valoare cât mai mică, respectiv modulul funcției de transfer are valoare cât mai mare). Gama de variație a frecvenței semnalului perturbator este $10 \text{ kHz} \pm 1,6\%$ adică $f \in [9840 ; 10160]$ Hz.

Modulul funcției de transfer a filtrului trece jos este:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \xrightarrow[\omega=2\pi f]{\omega_{-3\text{dB}}=\frac{1}{\sqrt{RC}}} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_{-3\text{dB}}}\right)^2}} \quad (271)$$

deci scade cu creșterea frecvenței. Așadar cea mai mare valoare o va avea la frecvența minimă din gama posibilă (9840 Hz). U_{ps} va fi:

$$U_{ps} = A \cdot |H(2 \cdot \pi \cdot 9840)| = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{9840}{5}\right)^2}} \cong 10 \cdot \frac{5}{9840} = 0,005 \text{ V} \quad (272)$$

Mai departe se folosește relația (267) alegând RRS cel mai dezavantajos pentru gama de frecvențe posibilă. Frecvența care va garanta cazul cel mai defavorabil va fi cea mai joasă frecvență din gamă a cărei valoare îndeplinește condiția $f = k \cdot 60 + 30 \text{ Hz}$, $k \in \mathbb{Z}$, adică 9870 Hz. Pentru această frecvență se determină RRS:

$$RRS_{\min|_{AB}} = 20\lg\left(\frac{\omega t_1}{2}\right) = 20\lg\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 9870 \cdot 16,67 \cdot 10^{-3}}{2}\right) = 54,28 \text{ dB} \Rightarrow RRS_{\min} = 10^{\frac{54,28}{20}} = 517,606 \quad (273)$$

$$U_{c.c. \text{ determinată}} = \frac{U_{ps}}{RRS_{\min}} = \frac{0,005}{517,606} = 9,65 \text{ } \mu\text{V} \quad (274)$$

Se observă că au fost folosite frecvențe diferite pentru calculul modulului funcției de transfer și pentru calculul RRS tocmai pentru a se asigura lucrul în cazul cel mai defavorabil. Dacă se va calcula

$U_{c.c. \text{ determinată}}$ păstrând o anumită frecvență în ambele etape de calcul se va observa că valoarea obținută va fi mai mică decât cea determinată cu relația (274). Este adevărat că, din motivul amintit mai sus, acest caz cel mai defavorabil nu poate fi obținut în practică, dar este foarte util pentru determinarea valorii maxime a $U_{c.c. \text{ determinată}}$. Este acum evident că eroarea maximă căutată va fi reprezentată exact de valoarea $U_{c.c. \text{ determinată}}$ calculată mai sus.

Problema 1.26. Convertorul analog-numeric dublă pantă din Fig. 52 are tensiunea cap de scară $U_{cs} = 20 \text{ V}$. Tensiunea maximă de la ieșirea integratorului este $|u(t)| = 10 \text{ V}$, durata integrării este $t_1 = 20 \text{ ms}$, oscilatorul are frecvența $f_{ck} = 1 \text{ MHz}$, numărătorul are 5 digiți. Să se determine:

- Valoarea constantei de timp $\tau = R \cdot C$;
- Numărul din numărător (N_1) la începutul fazei 1;
- Tensiunea de referință U_r pentru care se obține rezoluția maximă cu acest convertor.
- În ce țări se recomandă folosirea acestui convertor?

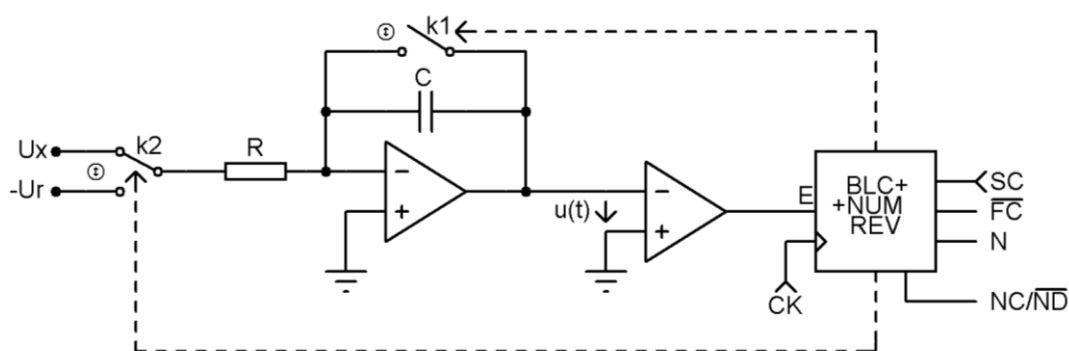


Fig. 52. Schema unui convertor analog-numeric dublă pantă.

CK – intrare semnal de tact, E – intrare „enable”, SC – intrare comandă start conversie, FC – ieșire semnalizare final conversie, N – ieșirea numărătorului, NC/ND – intrare comandă numărare crescătoare/numărare descrescătoare.

Rezolvare:

Funcționarea convertorului numeric-analogic are două faze:

Faza 1: integrarea tensiunii de măsurat. La începutul acestei faze comutatorul k_2 conectează tensiunea de măsurat U_x la intrarea integratorului format dintr-un amplificator operațional având o rețea de reacție negativă alcătuită dintr-un grup RC, iar comutatorul k_1 tocmai a fost deschis, rolul său fiind de a asigura descărcarea condensatorului C la finalul fiecărei conversii. Numărătorul folosit este reversibil (poate număra atât crescător cât și descrescător). La începutul acestei faze este setat să numere descrescător și în acesta se află stocat un număr nenul (N_1) care determină timpul de integrare t_1 în felul următor: la fiecare perioadă a semnalului de tact numărătorul va decremента valoarea stocată până când ajunge la zero, moment în care faza 1 se consideră terminată. Așadar timpul care trece până când numărătorul ajunge la zero este $t_1 = N_1 \cdot T_{ck} = \frac{N_1}{f_{ck}}$, ceea ce coincide cu timpul pentru care tensiunea de intrare va fi integrată.

Faza 2: integrarea tensiunii de referință. În această fază comutatorul k_2 va conecta tensiunea de referință U_r la intrarea integratorului și numărătorul este comutat în modul de lucru cu numărare crescătoare. Numărătorul va număra până când tensiunea de la ieșirea integratorului devine zero. Acest lucru este sesizat de comparatorul realizat cu al doilea amplificator operațional, evident fără bucle de reacție. În acest moment ieșirea comparatorului va bascula (va trece din „1” logic în „0” logic) și va determina oprirea numărătorului din numărare, semnalând și sfârșitul fazei 2 adică finalul conversiei. În acest moment se închide comutatorul k_2 pentru a descărca condensatorul C pregătindu-l pentru o nouă conversie.

a) Tensiunea pe un condensator respectă relația (275). În faza 1 tensiunea de la ieșirea integratorului ($u(t)$) va respecta relația (276).

$$q = C \cdot U_C \xrightarrow{I = \frac{dq}{dt}} I_C = C \cdot \frac{dU_C}{dt} \quad (275)$$

$$u(t) = U_C = \frac{1}{C} \int_0^t I_C(\tau) d\tau \quad (276)$$

S-a evitat folosirea $I_C(t)$ în relația de mai sus deoarece capătul superior de integrare ar fi fost tot variabila timp. Prin folosirea lui $I_C(\tau)$ s-a făcut diferențierea între variabila de integrare și capătul superior de integrare care este variabil. Se amintește faptul că $\int_A^x f(y) dy = F(x)$, unde A este o constantă, iar x o variabilă.

În relația (276) U_C reprezintă tensiunea pe condensatorul C considerată de la ieșirea amplificatorului operațional până la punctul de masă virtuală reprezentat de intrarea neinversoare a AO-ului, I_C este curentul care curge prin condensator în același sens cu tensiunea. Se observă că, dacă tensiunea de intrare U_x este considerată pozitivă, aceasta va determina un curent prin rezistența R egal cu $I_R = \frac{U_x}{R}$ cu sensul către intrarea neinversoare a AO-ului. Cum AO este ideal, nu curge curent în intrările sale, deci acest curent va trece în întregime prin condensatorul C curgând cu sensul de la borna neinversoare a AO către ieșirea AO, deci tocmai invers decât în cazul general descris în relația (275), adică $I_C = -I_R$. Ținând cont de acest lucru, relația (276) pentru cazul particular din problema curentă devine:

$$u(t) = U_C = -\frac{1}{C} \int_0^t \frac{U_x(\tau)}{R} d\tau = -\frac{1}{RC} \int_0^t U_x(\tau) d\tau \xrightarrow[\substack{U_x \text{ este o tensiune continuă, deci} \\ U_x(\tau) = U_x, \forall \tau}]{U_x \text{ este o tensiune continuă, deci}} u(t) = -\frac{U_x}{RC} t \quad (277)$$

În condițiile din enunț rezultă:

$$|u(t_1)|_{max} = \left| \frac{U_x}{RC} t_1 \right|_{max} = 10 \text{ V} \quad (278)$$

Deoarece t_1 este fixat, R și C au valori de asemenea fixe, $|u(t_1)|$ va avea valoare maximă atunci când U_x ia valoarea maximă permisă, adică tensiunea cap de scară U_{CS} .

$$\left| \frac{U_x}{RC} t_1 \right| = 10 \Rightarrow RC = \frac{20}{10} 20 \cdot 10^{-3} = 40 \text{ ms} \quad (279)$$

b) Timpul de integrare este 20 ms. Conform explicațiilor despre faza 1 rezultă:

$$t_1 = N_1 \cdot T_{ck} = \frac{N_1}{f_{ck}} \Rightarrow N_1 = t_1 \cdot f_{ck} = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^6 = 20000 \quad (280)$$

c) Convertorul dublă pantă va funcționa în condiții de eficiență maximă (rezoluție maximă) atunci când tensiunii maxime de intrare (tensiunea cap de scară) îi va corespunde, după conversie, cel

mai mare număr reprezentabil folosind numărătorul din dotarea convertorului. Altfel ar rămâne o gamă de valori la care numărătorul nu ar ajunge niciodată. După faza 1 condensatorul va fi încărcat la tensiunea:

$$u(t_1) = -\frac{U_x}{RC} t_1 \quad (281)$$

În faza 2 se va folosi tensiunea de referință pentru descărcarea condensatorului. Deoarece acesta este deja încărcat conform relației (281), tensiunea pe condensator în faza 2 va evolua conform legii:

$$u(t) = -\frac{U_x}{RC} t_1 - \frac{1}{RC} \int_{t_1}^{t_1+t} -U_r(\tau) d\tau = -\frac{U_x}{RC} t_1 + \frac{U_r}{RC} t \quad (282)$$

Așa cum s-a explicat, tensiunea de ieșire a integratorului va deveni nulă la finalul fazei 2, adică după trecerea unui timp necesar pentru descărcarea condensatorului, notat t_x . Relația (282) devine:

$$u(t_x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{U_x}{RC} t_1 + \frac{U_r}{RC} t_x = 0 \Leftrightarrow U_r t_x = U_x t_1 \quad (283)$$

Știind că $t_1 = N_1 \cdot T_{ck}$, în mod similar $t_x = N_{final} \cdot T_{ck}$. Conform condițiilor de funcționare optimă rezultă că N_{final} trebuie să fie cel mai mare număr reprezentabil folosind numărătorul disponibil când tensiunea de intrare este cea mai mare posibilă, $U_x = U_{cs}$. Cum numărătorul din acest convertor are 5 digiți, $N_{final} = 99999$. Rescriind relația (283) se determină tensiunea de referință optimă:

$$U_r \cdot N_{final} \cdot T_{ck} = U_{cs} \cdot N_x \cdot T_{ck} \Rightarrow U_r = \frac{U_{cs} \cdot N_x}{N_{final}} = \frac{20 \cdot 20000}{99999} \cong 4 \text{ V} \quad (284)$$

d) Cea mai comună sursă de perturbații alternative este rețeaua electrică. Așadar pentru a răspunde la această întrebare se vor determina frecvențele la care valoarea RRS este infinită pentru o tensiune de intrare armonică.

$$RRS_{max|dB} = -20 \lg \left(\left| \text{sinc} \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) \right| \right) = -20 \lg \left(\left| \frac{\sin \left(\frac{\omega t_1}{2} \right)}{\frac{\omega t_1}{2}} \right| \right) \xrightarrow{\sin \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) = 0} \infty \quad (285)$$

$$\sin \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\omega t_1}{2} = k\pi \Rightarrow \omega = \frac{2k\pi}{t_1} \xrightarrow{\omega = 2\pi f} f = \frac{k}{t_1} \cong k \cdot 50 \text{ Hz}, k \in \mathbb{Z} \quad (286)$$

Țările în care se recomandă folosirea acestui convertor sunt acele țări în care rețeaua electrică are frecvența egală cu 50 Hz, cum ar fi România, țările din Europa, dar și cea mai mare parte din țările din întreaga lume (excepții notabile fiind Brazilia, Canada, Colombia, Cuba, Ecuador, El Salvador, Haiti, Mexic, Peru, Arabia Saudită, SUA, Venezuela). Japonia este un caz special care folosește atât 50 Hz (Kyoto și vestul țării) cât și 60 Hz (Tokyo și estul țării).

Problema 1.27. Să se aleagă tensiunea de referință U_r într-un convertor analog-numeric dublă pantă cu 4 digiți dacă tensiunea de offset a comparatorului este $|U_{off}| \leq 1 \text{ mV}$. Se impune ca eroarea cauzată de tensiunea de offset să nu afecteze precizia aparatului. Se cunoaște constanta de timp a grupării RC: $\tau = R \cdot C = t_{xmax}$.

Rezolvare:

Se poate demonstra că tensiunea de offset a unui amplificator operațional poate fi modelată ca o sursă de tensiune continuă înseriată cu intrarea neinversoare a acestuia. În acest caz schema convertorului dublă pantă se modifică în mod corespunzător așa cum se poate observa în Fig. 53.

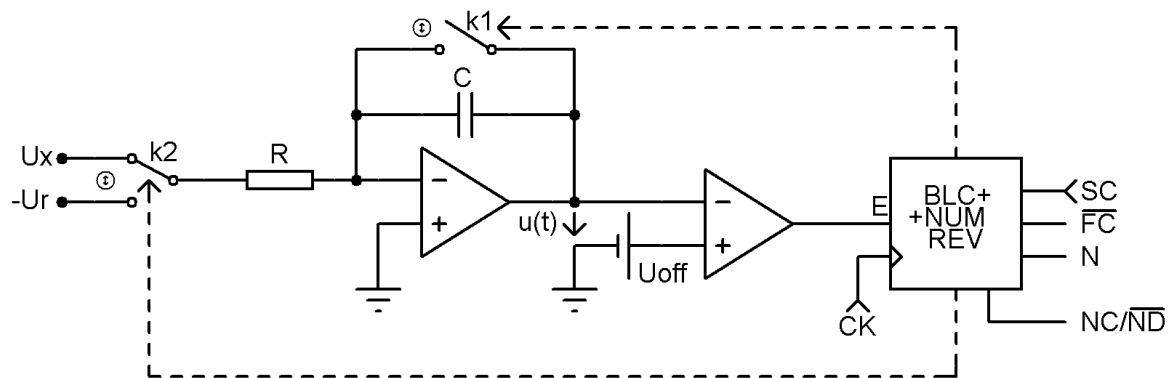


Fig. 53. Schema unui convertor analog-numeric dublă pantă când s-a luat în considerare tensiunea de offset a amplificatorului operațional cu rol de comparator.

Se reamintește că faza 2 a unui ciclu de conversie se termină atunci când ieșirea comparatorului devine „0” logic (potențialul bornei inversoare devine mai mic decât potențialul bornei neinversoare). În cazul de față, borna neinversoare a comparatorului nu va mai avea potențial nul ca în cazul ideal (vezi Fig. 52), ci un potențial egal cu U_{off} . Așadar tensiunea de la ieșirea integratorului trebuie să ajungă acum la valoarea U_{off} pentru a determina bascularea ieșirii comparatorului și oprirea conversiei, față de cazul ideal în care conversia se oprea când tensiunea de la ieșirea integratorului devenea egală cu zero. În consecință și durata fazei 2 va fi modificată (t_x' față de t_x în Fig. 54) și deoarece această durată determină valoarea măsurată a tensiunii, va exista o eroare de măsură a tensiunii de intrare.

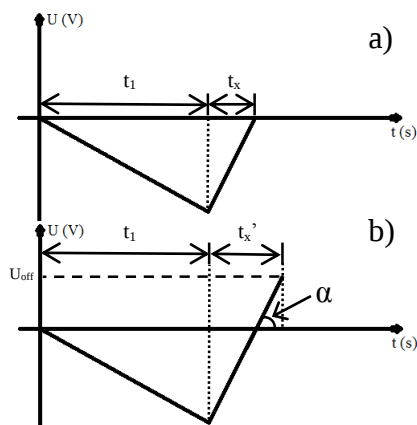


Fig. 54. Variația tensiunii de la ieșirea integratorului pe durata unui ciclu de conversie: a) în cazul în care se folosește drept comparator un amplificator operațional ideal ($U_{off} = 0$); b) în cazul în care se folosește drept comparator un amplificator operațional cu $U_{off} \neq 0$.

Conform explicațiilor din problema 1.26, la finalul fazei 1 este valabilă relația:

$$u(t_1) = -\frac{U_x}{R \cdot C} t_1 \quad (287)$$

La finalul fazei 2, în cazul ideal (comparator cu AO ideal, cu tensiune de offset nulă) este valabilă relația:

$$u(t_1 + t_x) = -\frac{U_x}{R \cdot C} t_1 + \frac{U_r}{R \cdot C} t_x = 0 \quad (288)$$

Din relația (288) rezultă că panta dreptei care reprezintă variația tensiunii în faza 2 este $\frac{U_r}{R \cdot C}$. În același timp aceeași pantă poate fi exprimată ca tangenta unghiului notat α în Fig. 54. Rezultă relația:

$$tg(\alpha) = \frac{|U_{off}|}{t_{x'} - t_x} = \frac{U_r}{R \cdot C} \iff \frac{|U_{off}|}{\Delta t_x} = \frac{U_r}{R \cdot C} \Rightarrow \Delta t_x = \frac{|U_{off}| \cdot R \cdot C}{U_r} \quad (289)$$

Eroarea de măsură determinată de tensiunea de offset va fi dată de variația duratei fazei 2 față de cazul ideal:

$$|\varepsilon_{t_x}| = \frac{\Delta t_x}{t_x} \quad (290)$$

Cazul ideal este caracterizat de relația (288), deci t_x poate fi determinat din respectiva relație și înlocuit în (290). Cazul curent este caracterizat de Δt_x , deci acesta poate fi înlocuit cu expresia sa din (289) în relația (290).

$$|\varepsilon_{t_x}| = \frac{\Delta t_x}{t_x} = \frac{\frac{|U_{off}| \cdot R \cdot C}{U_r}}{\frac{U_x \cdot t_1}{U_r}} = \frac{|U_{off}| \cdot R \cdot C}{U_x \cdot t_1} \quad (291)$$

Convertorul analog-numeric se bazează pe un numărător pentru măsurarea duratelor. Durata influențată de tensiunea de offset este t_x . Se cunoaște că acest tip de măsurătoare este caracterizată de eroarea de $1/N$. În cazul de față se poate scrie:

$$\left| \varepsilon_{\frac{1}{N}} \right| = \frac{1}{N_x} = \frac{1}{\frac{t_x}{T_{ck}}} = \frac{T_{ck}}{t_x} = \frac{T_{ck}}{\frac{U_x \cdot t_1}{U_r}} = \frac{T_{ck} \cdot U_r}{U_x \cdot t_1} \quad (292)$$

Pentru a nu afecta precizia aparatului este suficient ca eroarea determinată de tensiunea de offset să fie mai mică sau egală cu jumătate din eroarea de $1/N$ caracteristică modului de măsură al aparatului.

$$|\varepsilon_{t_x}| \leq \frac{1}{2} \left| \varepsilon_{\frac{1}{N}} \right| \iff \frac{|U_{off}| \cdot R \cdot C}{U_x \cdot t_1} \leq \frac{1}{2} \frac{T_{ck} \cdot U_r}{U_x \cdot t_1} \Rightarrow U_r \geq \frac{2 \cdot |U_{off}| \cdot R \cdot C}{T_{ck}} \quad (293)$$

Din enunț $R \cdot C = \tau = t_{x_{max}}$ și numărătorul are 4 digiți ($N_{x_{max}} = 9999$). Rezultă:

$$U_r \geq \frac{2 \cdot |U_{off}| \cdot R \cdot C}{T_{ck}} = \frac{2 \cdot |U_{off}| \cdot t_{x_{max}}}{T_{ck}} = \frac{2 \cdot |U_{off}| \cdot N_{x_{max}} \cdot T_{ck}}{T_{ck}} = 2 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 9999 = 19,998 \text{ V} \quad (294)$$

$$U_r \geq 19,998 \text{ V} \quad (295)$$

Capitolul 2. Osciloscopul numeric

APLICATII

Problema 2.1. Se dă un osciloscop numeric care are frecvența de eșantionare maximă de 25 MHz, 500 de eșantioane afișate pe ecran (N_s) și numărul de diviziuni ale grilei osciloscopului (N_x) egal cu 10. Se cere:

- Să se determine frecvența de eșantionare cu care va funcționa osciloscopul pentru $C_{x_1} = 50 \mu s/div$, respectiv $C_{x_2} = 1 \mu s/div$;
- Să se calculeze timpul de creștere minim pe care îl poate măsura acest osciloscop;
- Să se calculeze eroarea relativă pe care o face acest osciloscop la măsurarea unui timp de creștere de $0,2 \mu s$.

Rezolvare:

a) Pentru calculul frecvenței de eșantionare se folosește relația:

$$N_x \cdot C_x = N_s \cdot T_s \Rightarrow F_s = \frac{N_s}{N_x \cdot C_x} \quad (296)$$

Înlocuind $C_{x_1} = 50 \mu s/div$ rezultă: $F_{s_1} = \frac{N_s}{N_x \cdot C_{x_1}} = \frac{500}{10 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} Hz \Rightarrow F_{s_1} = 1 MHz < 25 MHz$ (297)

Înlocuind $C_{x_2} = 1 \mu s/div$ rezultă: $F_{s_2} = \frac{N_s}{N_x \cdot C_{x_2}} = \frac{500}{10 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} Hz \Rightarrow F_{s_2} = 50 MHz > 25 MHz$ (298)

În cazul în care frecvența de eșantionare calculată este mai mare decât frecvența de eșantionare maximă este evident că osciloscopul va funcționa la frecvența de eșantionare maximă. Așadar F_{s_2} va fi egal cu 25 MHz. Pentru a menține egalitatea în relația (296) valoarea lui N_s se va modifica în mod corespunzător.

$$F_{s_2} = 50 MHz > 25 MHz \Rightarrow F_{s_2} = 25 MHz \Rightarrow$$

$$N_s = N_x \cdot C_{x_2} \cdot F_{s_2} = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^6 = 250 \text{ eșantioane} \quad (299)$$

b) Timpul de creștere minim măsurabil este dat de perioada de rezoluția temporală a osciloscopului determinată de perioada de eșantionare minimă.

$$T_{s_{min}} = \frac{1}{F_{s_{max}}} \Rightarrow T_{s_{min}} = \frac{1}{25 MHz} = 40 ns \Rightarrow t_{c_{min}} = 40 ns \quad (300)$$

c) Eroarea absolută făcută la măsurarea timpului de creștere este $\Delta t_c = \Delta t_{c1} + \Delta t_{c2}$ (vezi Fig. 55). Valoarea maximă pe care o poate lua Δt_c este $2T_s$. Pentru a minimiza această valoare se consideră $T_s = T_{s_{min}}$. Așadar eroarea relativă căutată este:

$$\varepsilon_{t_c} = \frac{2 \cdot \Delta t}{t_c} \cdot 100\% \Rightarrow \varepsilon_{t_c} = \frac{2 \cdot 40 ns}{200 ns} \cdot 100\% \Rightarrow \varepsilon_{t_c} = \frac{80 ns}{200 ns} \cdot 100\% \Rightarrow \varepsilon_{t_c} = 40\% \quad (301)$$

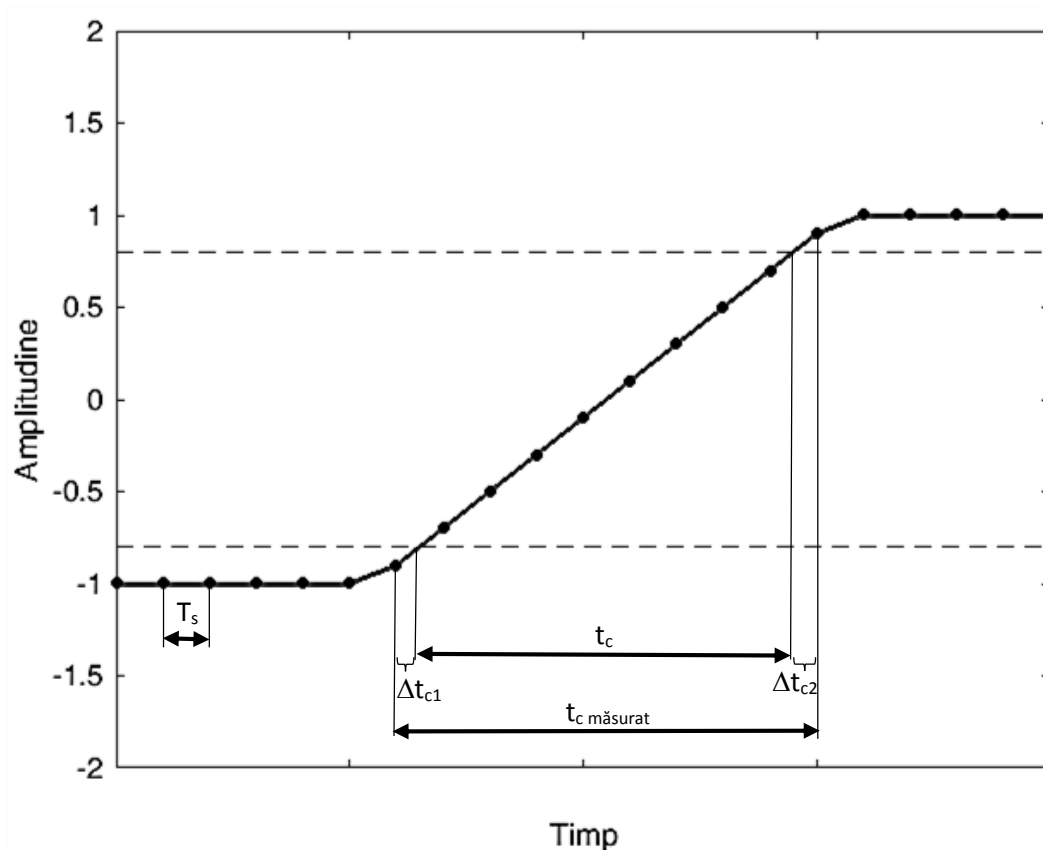


Fig. 55. Măsurarea timpului de creștere.

Problema 2.2. Cu ajutorul unui osciloscop numeric având frecvența de eșantionare maximă $f_{s\max}=25$ MHz, $N_s=500$ eșantioane afișate pe ecran, $N_x=10$ div, se măsoara frecvența unui semnal periodic având componente spectrale la 4 frecvențe, $f_{x_1} = 0,7$ MHz, $f_{x_2} = 1,5$ MHz, $f_{x_3} = 6$ MHz, $f_{x_4} = 7,25$ MHz. Coeficientul de deflexie folosit este $C_x=20$ μ s/div. Se cere:

- Să se determine valorile afișate de osciloscop la măsurarea în modul FFT.
- Dacă pe întreg ecranul osciloscopului este vizualizată o singură perioadă din semnal să se calculeze frecvența maximă a unui semnal sinusoidal care să poată fi afișat fără interpolare.

Rezolvare:

În modul de lucru FFT (Fast Fourier Transform) osciloscopul funcționează ca un analizor spectral afișând spectrul de amplitudini al semnalului achiziționat. Domeniul de frecvențe afișat este de la 0 Hz până la jumătate din frecvența de eșantionare folosită. Așadar pentru a determina domeniul de frecvențe afișat se determină întâi frecvența de eșantionare folosind formula (296):

$$F_s = \frac{N_s}{N_x \cdot C_x} = \frac{500}{10 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 2,5 \text{ MHz}$$

Transformata Fourier a unui semnal real este o funcție complexă. Modulul transformatei Fourier pentru un semnal real este o funcție pară. Modulul transformatei Fourier pentru semnalul periodic ce urmează a fi analizat cu osciloscopul (semnalul continuu în timp, înainte de analiză) este prezentat în Fig. 56. În problema curentă nu sunt de interes amplitudinile componentelor spectrale, ci numai frecvențele la care acestea sunt plasate.

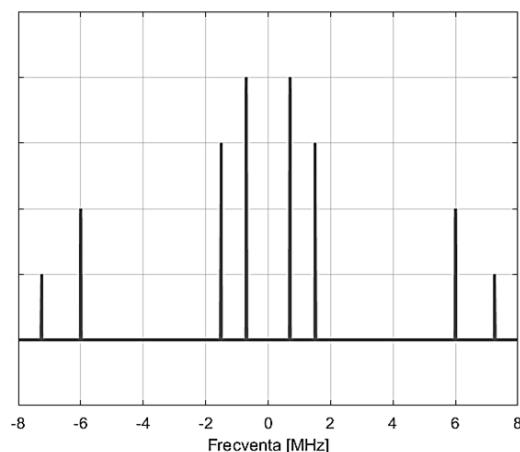


Fig. 56. Spectrul semnalului de analizat

Se observă în Fig. 56 cele 8 componente spectrale care formează spectrul semnalului de analizat, plasate la frecvențele f_{x_1} , f_{x_2} , f_{x_3} , f_{x_4} dar și la $-f_{x_1}$, $-f_{x_2}$, $-f_{x_3}$ și $-f_{x_4}$ (deoarece modulul transformatei Fourier pentru un semnal real este o funcție pară).

Principala consecință de interes pentru problema curentă a procesului de eșantionare este periodizarea spectrului semnalului. Astfel, după eșantionare, spectrul nu se va mai regăsi doar în jurul frecvenței zero (ca în Fig. 56), dar și în jurul frecvențelor $k \cdot F_s$, unde k este un număr întreg.

Replicile obținute prin periodizare, plasate în jurul frecvențelor F_s , $2 \cdot F_s$ și $3 \cdot F_s$ pot fi observate în Fig. 57. În Fig. 57 a) componentele sunt plasate la frecvențele $F_s + f_{x_1}$, $F_s + f_{x_2}$, $F_s + f_{x_3}$, $F_s + f_{x_4}$, respectiv la $F_s - f_{x_1}$, $F_s - f_{x_2}$, $F_s - f_{x_3}$, $F_s - f_{x_4}$. În mod similar, în Fig. 57 b) acestea vor fi plasate la frecvențele $2F_s + f_{x_1}$, $2F_s + f_{x_2}$, $2F_s + f_{x_3}$, $2F_s + f_{x_4}$, respectiv la $2F_s - f_{x_1}$, $2F_s - f_{x_2}$, $2F_s - f_{x_3}$, $2F_s - f_{x_4}$. Se pot deduce ușor frecvențele din Fig. 57 c), dar și pentru celelalte replici, chiar și din jurul frecvențelor $-F_s$, $-2F_s$, $-3F_s$ etc. Spectrul final este obținut prin sumarea tuturor acestor replici și este reprezentat în Fig. 58.

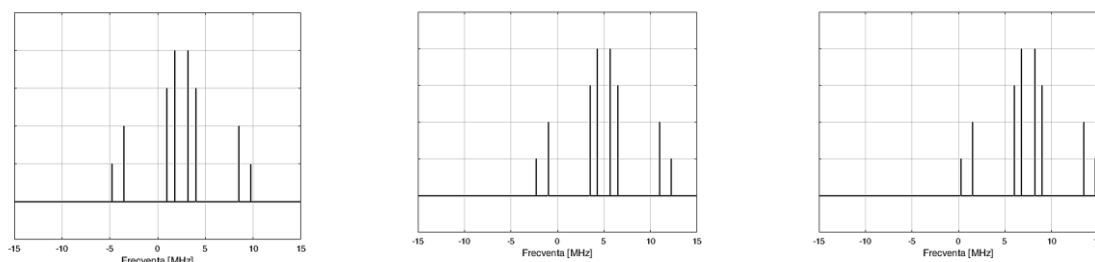


Fig. 57.

a) Replica spectrului principal plasată în jurul frecvenței F_s , replică obținută prin periodizare.

b) Replica spectrului principal plasată în jurul frecvenței $2 \cdot F_s$, replică obținută prin periodizare.

c) Replica spectrului principal plasată în jurul frecvenței $3 \cdot F_s$, replică obținută prin periodizare.

Osciloscopul va afișa numai domeniul de frecvențe de la 0 Hz până la jumătate din frecvența de eșantionare folosită, adică de la 0 Hz până la 1,25 MHz. Deoarece frecvența cea mai mare din spectrul semnalului continuu este $f_{x_4} = 7,25$ MHz, este suficient să se ia în considerare efectul replicilor enumerate mai sus, adică cele mai îndepărtate replici să fie cele din jurul $-3F_s$ și $3F_s$. Contribuțiile de

luat în considerare date de replica plasată în jurul $4F_s$ sunt numai $4F_s - f_{x_1}$, $4F_s - f_{x_2}$, $4F_s - f_{x_3}$ și $4F_s - f_{x_4}$ pentru că cele obținute prin însumare ar rezulta pe frecvențe mai mari decât $4F_s$, deci clar mai departe de intervalul afișat (de la 0 Hz până la 1,25 MHz). Chiar și astfel, componenta cea mai apropiată de intervalul afișat va fi plasată la $4F_s - f_{x_4} = 4 \cdot 2,5 - 7,25 = 2,75 \text{ MHz} > 1,25 \text{ MHz}$, deci această replică nu va avea contribuții în afișare. Este evident că nu are sens să se mai ia în considerare alte replici. Pentru a determina care sunt componentele afișate pe ecran se calculează frecvența pentru fiecare componentă din cele 6 replici pentru care are sens și se compară cu intervalul de vizualizare.

Tabelul 15. Determinarea frecvențelor componentelor spectrale după eșantionare.

$F_s + f_{x_1} = 2,5 + 0,7 > F_s/2$ $F_s + f_{x_2} = 2,5 + 1,5 > F_s/2$ $F_s + f_{x_3} = 2,5 + 6 > F_s/2$ $F_s + f_{x_4} = 2,5 + 7,25 > F_s/2$	$F_s - f_{x_1} = 2,5 - 0,7 = 1,8 \text{ MHz}$ $\mathbf{F_s - f_{x_2} = 2,5 - 1,5 = 1 \text{ MHz}}$ $F_s - f_{x_3} = 2,5 - 6 = -3,5 \text{ MHz}$ $F_s - f_{x_4} = 2,5 - 7,25 = -4,75 \text{ MHz}$
$2F_s + f_{x_1} = 5 + 0,7 > F_s/2$ $2F_s + f_{x_2} = 5 + 1,5 > F_s/2$ $2F_s + f_{x_3} = 5 + 6 > F_s/2$ $2F_s + f_{x_4} = 5 + 7,25 > F_s/2$	$2F_s - f_{x_1} = 5 - 0,7 = 4,3 \text{ MHz}$ $2F_s - f_{x_2} = 5 - 1,5 = 3,5 \text{ MHz}$ $2F_s - f_{x_3} = 5 - 6 = -1 \text{ MHz}$ $2F_s - f_{x_4} = 5 - 7,25 = -2,25 \text{ MHz}$
$3F_s + f_{x_1} = 7,5 + 0,7 > F_s/2$ $3F_s + f_{x_2} = 7,5 + 1,5 > F_s/2$ $3F_s + f_{x_3} = 7,5 + 6 > F_s/2$ $3F_s + f_{x_4} = 7,5 + 7,25 > F_s/2$	$3F_s - f_{x_1} = 7,5 - 0,7 = 6,8 \text{ MHz}$ $3F_s - f_{x_2} = 7,5 - 1,5 = 6 \text{ MHz}$ $3F_s - f_{x_3} = 7,5 - 6 = 1,5 \text{ MHz}$ $\mathbf{3F_s - f_{x_4} = 7,5 - 7,25 = 0,25 \text{ MHz}}$
$-F_s + f_{x_1} = -2,5 + 0,7 = -3,2 \text{ MHz}$ $-F_s + f_{x_2} = -2,5 + 1,5 = -1 \text{ MHz}$ $-F_s + f_{x_3} = -2,5 + 6 = 3,5 \text{ MHz}$ $-F_s + f_{x_4} = -2,5 + 7,25 = 4,75 \text{ MHz}$	$-F_s - f_{x_1} = -2,5 - 0,7 < 0$ $-F_s - f_{x_2} = -2,5 - 1,5 < 0$ $-F_s - f_{x_3} = -2,5 - 6 < 0$ $-F_s - f_{x_4} = -2,5 - 7,25 < 0$
$-2F_s + f_{x_1} = -5 + 0,7 = -4,3 \text{ MHz}$ $-2F_s + f_{x_2} = -5 + 1,5 = -3,5 \text{ MHz}$ $\mathbf{-2F_s + f_{x_3} = -5 + 6 = 1 \text{ MHz}}$ $-2F_s + f_{x_4} = -5 + 7,25 = 2,25 \text{ MHz}$	$-2F_s - f_{x_1} = -5 - 0,7 < 0$ $-2F_s - f_{x_2} = -5 - 1,5 < 0$ $-2F_s - f_{x_3} = -5 - 6 < 0$ $-2F_s - f_{x_4} = -5 - 7,25 < 0$
$-3F_s + f_{x_1} = -7,5 + 0,7 < 0$ $-3F_s + f_{x_2} = -7,5 + 1,5 < 0$ $-3F_s + f_{x_3} = -7,5 + 6 < 0$ $-3F_s + f_{x_4} = -7,5 + 7,25 < 0$	$-3F_s - f_{x_1} = -7,5 - 0,7 < 0$ $-3F_s - f_{x_2} = -7,5 - 1,5 < 0$ $-3F_s - f_{x_3} = -7,5 - 6 < 0$ $-3F_s - f_{x_4} = -7,5 - 7,25 < 0$

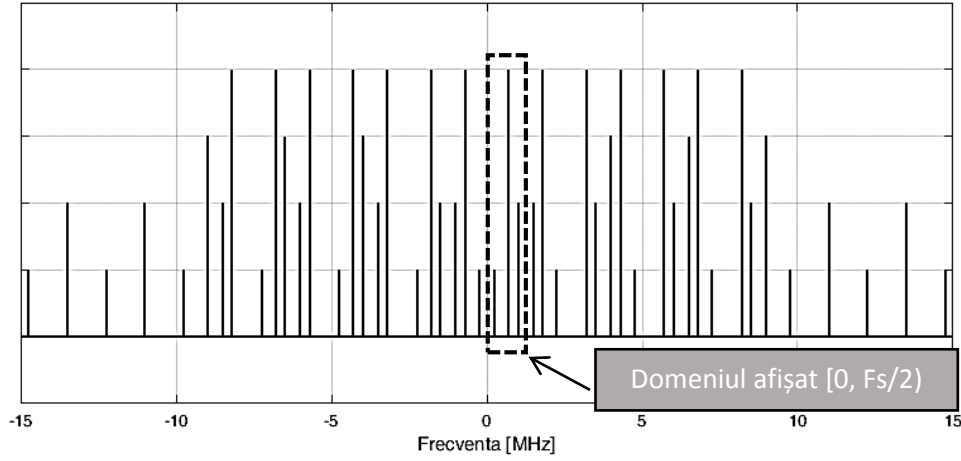


Fig. 58. Spectrul semnalului eșantionat luând în considerare primele 3 replici obținute prin periodizare.

În tabelul de mai sus au fost marcate prin îngroșare componentele a căror frecvență se află în domeniul afișat. Acestea pot fi observate și în Fig. 58 (0,25 MHz provenind din $3F_s - f_{x4}$, 0,7 MHz provenind din f_{x1} și 1 MHz provenind din $-2F_s - f_{x3}$ și din $F_s - f_{x2}$). Se reamintește faptul că în această problemă amplitudinile nu sunt de interes.

Pentru a evita calculele de mai sus există un algoritm rapid de determinare a frecvențelor afișate dacă se cunosc frecvențele componentelor și frecvența de eșantionare. Este suficient să se trateze următoarele 3 cazuri:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x \in \left[0, \frac{F_s}{2}\right) \Rightarrow F_{afisat} = f_x \\ F_x \in \left[\frac{F_s}{2}, F_s\right) \Rightarrow F_{afisat} = F_s - f_x \\ F_x \in [F_s, \infty) \Rightarrow F'_x = F_x \bmod F_s \Rightarrow \begin{cases} F'_x \in \left[0, \frac{F_s}{2}\right) \Rightarrow F_{afisat} = F'_x \\ F'_x \in \left[\frac{F_s}{2}, F_s\right) \Rightarrow F_{afisat} = F_s - F'_x \end{cases} \end{array} \right. \quad (302)$$

$$C_x \cdot N_x = N_s \cdot T_s \Rightarrow F_s = \frac{N_s}{N_x \cdot C_x} = \frac{500}{10 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 2,5 \text{ MHz} \quad (303)$$

$$\text{Pentru } f_{x1} = 0,7 \text{ MHz rezultă: } f_{x1} < \frac{F_s}{2} = 1,25 \text{ MHz} \Rightarrow F_{afisat} = f_{x1} = 0,7 \text{ MHz} \quad (304)$$

Pentru $f_{x2} = 1,5 \text{ MHz}$ rezultă:

$$f_{x2} > \frac{F_s}{2} = 1,25 \text{ MHz} \Rightarrow F_{afisat} = F_s - f_{x2} = 2,5 \text{ MHz} - 1,5 \text{ MHz} = 1 \text{ MHz} \quad (305)$$

Pentru $f_{x3} = 6 \text{ MHz}$ rezultă:

$$f_{x3} > F_s \Rightarrow F'_{x3} = f_{x3} \bmod F_s = 6 \bmod 2,5 = 1 \Rightarrow F'_{x3} = 1 \text{ MHz} < \frac{F_s}{2} \Rightarrow F_{afisat} = 1 \text{ MHz} \quad (306)$$

Pentru $f_{x4} = 7,25 \text{ MHz}$ rezultă:

$$\begin{aligned} f_{x4} > F_s \Rightarrow F'_{x4} = f_{x4} \bmod F_s = 7,5 \bmod 2,5 = 2,25 \Rightarrow F'_{x4} = 2,25 \text{ MHz} \in \left[\frac{F_s}{2}, F_s\right) \Rightarrow \\ F_{afisat} = F_s - F'_{x4} = 2,5 - 2,25 = 0,25 \text{ MHz} \end{aligned} \quad (307)$$

b) Afișarea fără interpolare înseamnă că pe ecran sunt afișate 500 de eșantioane, deci $N_s=500$ eșantioane. Esta valabilă relația:

$$N_x \cdot C_x = N_s \cdot T_{smin} \quad (308)$$

În relația (308) $N_x \cdot C_x$ reprezintă timpul afișat pe întreg ecranul osciloscopului. Enunțul spune că pe ecran se dorește să se afișeze o perioadă din semnal. Deci $N_x \cdot C_x = T_x$. Relația (308) se transformă în:

$$T_x = N_s \cdot T_s \Rightarrow F_x = \frac{F_s}{N_s} \quad (309)$$

N_s fiind fixat, pentru a determina frecvența maximă a semnalului pentru care pe ecran se va afișa fix o perioadă din semnal fără interpolare este suficient să se maximizeze termenul $\frac{F_s}{N_s}$.

$$F_{xmax} = \frac{F_{smax}}{N_s} = \frac{25 \cdot 10^6}{500} = 50 \text{ kHz} \quad (310)$$

Problema 2.3. Se utilizează un osciloscop numeric cu $f_{max} = 50 \text{ MHz}$, $N_x = 10 \text{ div}$ pe orizontală și $N_s = 500$ eșantioane. Să se determine:

- Frecvența maximă a unui semnal sinusoidal astfel încât pe ecran să se vizualizeze exact 4 perioade din semnal și afișarea să se facă fără interpolare.
- Timpul de creștere minim care poate fi măsurat cu o eroare mai mică de 5%.
- Frecvențele pentru componentele vizualizate în modul FFT dacă la intrarea osciloscopului se aplică semnalul $s(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$ cu $f_1 = 0,8 \text{ MHz}$ și $f_2 = 2,3 \text{ MHz}$. Semnalul este vizualizat folosind coeficientul de deflexie $C_x = 50 \mu\text{s/div}$.

Rezolvare:

a) Rezolvarea este similară cu cea a punctului b) de la problema 2.2. $N_x \cdot C_x$ este timpul afișat pe ecran. În acest caz el reprezintă 4 perioade din semnalul achiziționat.

$$4T_x = N_s \cdot T_s \Rightarrow \frac{F_x}{4} = \frac{F_s}{N_s} \Rightarrow F_{xmax} = 4 \frac{F_{smax}}{N_s} = \frac{4 \cdot 50 \cdot 10^6}{500} = 400 \text{ kHz} \quad (311)$$

Eroarea la măsurarea timpului de creștere este:

$$\varepsilon_{t_c} = \frac{2 \cdot T_{smin}}{T_c} \quad (312)$$

Impunând condiția din problemă:

$$\frac{2 \cdot T_{smin}}{T_c} < 0,05 \Leftrightarrow T_c > \frac{2 \cdot T_{smin}}{0,05} = \frac{2}{F_{smax} \cdot 0,05} = \frac{2}{50 \cdot 10^6 \cdot 0,05} = 800 \text{ ns} \quad (313)$$

b) Similar cu punctul a) al problemei anterioare se determină:

$$C_x \cdot N_x = N_s \cdot T_s \Rightarrow F_s = \frac{N_s}{N_x \cdot C_x} = \frac{500}{10 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 1 \text{ MHz} \quad (314)$$

Pentru $f_{x1} = 0,8 \text{ MHz}$ rezultă: $f_{x1} \in \left(\frac{F_s}{2}, F_s\right) \Rightarrow F_{x1 \text{ afișat}} = F_s - f_{x1} = 1 - 0,8 = 0,2 \text{ MHz}$ (315)

Pentru $f_{x2} = 2,3 \text{ MHz}$ rezultă:

$$f_{x2} > F_s \Rightarrow F'_{x2} = f_{x2} \bmod F_s = 2,3 \bmod 1 = 0,3 \text{ MHz} < \frac{F_s}{2} \Rightarrow F_{x2 \text{ afișat}} = 0,3 \text{ MHz} \quad (316)$$

Problema 2.4. Să se calculeze dimensiunea memoriei unui osciloscop numeric astfel încât să se poată captura un eveniment de durată $t_0 = 20 \mu s$ pentru un coeficient de deflexie egal $C_x = 250$ ns/div. Se cunosc: $F_{s_{max}} = 1$ GHz, $N_s = 2500$ eşantioane afişate pe ecran, $N_x = 10$ diviziuni, cuantizarea fiind făcută cu 8 biţi.

Rezolvare:

$$N_x \cdot C_x = N_s \cdot T_s \Rightarrow F_s = \frac{N_s}{C_x \cdot N_x} = \frac{2500}{250 \cdot 10^{-9} \cdot 10} = 1 \text{ GHz} \Rightarrow T_s = 1 \text{ ns} \quad (317)$$

Aşadar un eşantion se va achiziţiona la fiecare 1 ns. Pentru a achiziţiona $20 \mu s$ se vor achiziţiona $\frac{t_0}{T_s} = \frac{20 \cdot 10^{-6}}{10^{-9}} = 20000$ eşantioane. Cum fiecare eşantion este salvat folosind o reprezentare cu 8 biţi rezultă dimensiunea necesară a memoriei $N_A = 20000 \cdot 8 = 160 \text{ kb}$.

Problema 2.5. Se dă un osciloscop numeric având $f_{s_{max}} = 25 \text{ MHz}$, $N_s = 500$ eşantioane afişate pe ecran, $N_x = 10$ diviziuni orizontale ale graticulei. La intrarea osciloscopului se aplică un semnal dreptunghiular periodic cu perioada $T = 400 \text{ ns}$, factor de umplere 10%, amplitudine minimă 0 V şi amplitudine maximă 1,5 V. Osciloscopul are parametrii de sincronizare: tensiunea de prag $U_p = 0,5 \text{ V}$, front crescător. Coeficienţii de deflexie folosiţi sunt $C_x = 20 \text{ ns/div}$, $C_y = 0,5 \text{ V/div}$. Momentul de trigger este situat la a treia diviziune faţă de începutul ecranului. Să se reprezinte imaginea vizualizată pe osciloscop în modul de interpolare liniar şi în modul de interpolare „SINE”.

Rezolvare:

Se calculează frecvenţa de eşantionare cu care lucrează osciloscopul:

$$N_x \cdot C_x = N_s \cdot T_s \Rightarrow F_s = \frac{N_s}{C_x \cdot N_x} = \frac{500}{20 \cdot 10^{-9} \cdot 10} = 2,5 \text{ GHz} > f_{s_{max}} \Rightarrow F_s = f_{s_{max}} = 25 \text{ MHz} \quad (318)$$

Aşadar osciloscopul nu va putea achiziţiona cele 500 de eşantioane, ci numai un număr de:

$$N_s = N_x \cdot C_x \cdot f_{s_{max}} = 10 \cdot 20 \cdot 10^{-9} \cdot 25 \cdot 10^6 = 5 \text{ eşantioane} \quad (319)$$

Având un factor de umplere 10%, semnalul va avea amplitudinea maximă timp de 10% din perioada sa, iar cea minimă în rest. Aşadar semnalul va avea amplitudinea maximă pentru o durată de:

$$\tau = \frac{10}{100} \cdot 400 \text{ ns} = 40 \text{ ns} \quad (320)$$

În Fig. 59 s-a desenat cu linie întreruptă semnalul care ar fi fost achiziţionat dacă osciloscopul funcţiona cu frecvenţa de eşantionare necesară. Cu cercuri s-au marcat cele 5 eşantioane achiziţionate.

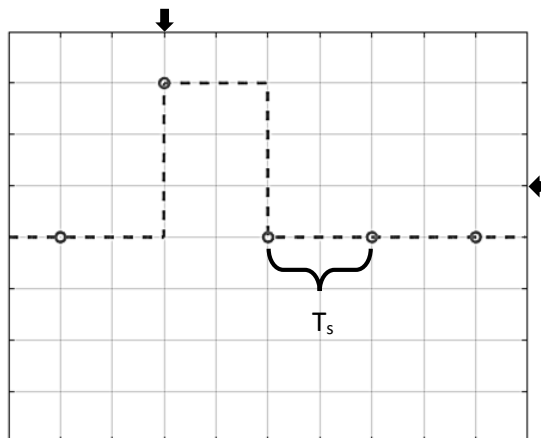


Fig. 59. Semnalul aplicat la intrarea osciloscopului și eşantioanele achiziţionate.

În momentul în care semnalul îndeplinește condițiile de sincronizare (amplitudinea sa trece prin valoarea de prag $U_p = 0,5 \text{ V}$ cu un front crescător) osciloscopul începe afișarea eșantioanelor pe ecran, spațiate la o durată dată de perioada de eșantionare (T_s). Momentul de sincronizare (săgeata de deasupra ecranului) arată unde va fi plasată pe ecran porțiunea de semnal care îndeplinește condițiile de sincronizare (de exemplu dacă ar fi fost plasată la a patra diviziune, numărând de la stânga ecranului spre dreapta, semnalul ar fi avut frontul crescător întâlnit la a patra diviziune. Dacă ar fi fost ales ca parametru de sincronizare frontul căzător, atunci acest front ar fi fost aliniat cu săgeata indicatoare a momentului de sincronizare).

Având la dispoziție cele 5 eșantioane, osciloscopul poate reconstrui semnalul folosind două moduri de interpolare. În modul de interpolare liniară osciloscopul va uni eșantioanele vecine printr-o linie dreaptă rezultând imaginea din Fig. 60. În modul de interpolare „SINE” osciloscopul reconstruiește semnalul printr-o sumă de funcții de tip sinus cardinal (sinc) ponderate cu valorile eșantioanelor și întârziate astfel încât valoarea maximă să se obțină exact la momentul la care a fost achiziționat respectivul eșantion. În problema curentă se observă că numai un eșantion are valoare nenulă, deci suma va avea un singur termen și funcția sinc corespunzătoare acelui eșantion va fi reprezentarea finală a semnalului interpolat care poate fi observată în Fig. 61. Frecvența funcțiilor sinc este jumătate din frecvența de eșantionare, conform teoremei eșantionării.

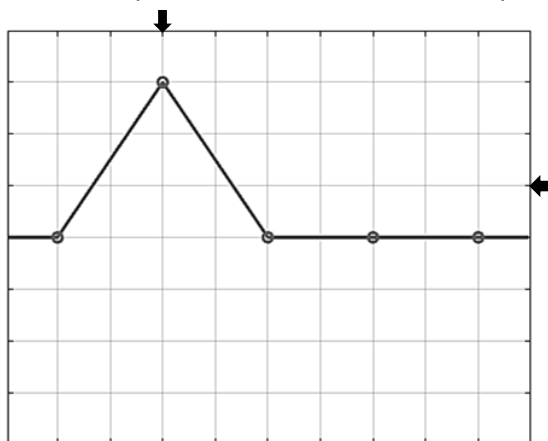


Fig. 60. Imaginea afișată pe ecranul osciloscopului în modul de interpolare liniară.

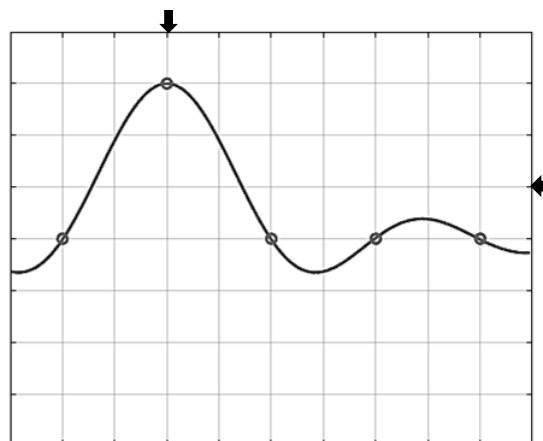


Fig. 61. Imaginea afișată pe ecranul osciloscopului în modul de interpolare „SINE”.

Problema 2.6. Un sistem numeric de procesare a semnalului are un CAN de intrare pe 4 biți. Să se calculeze raportul semnal-zgomot la intrare și pe câți biți se poate dimensiona CNA-ul de ieșire, știind că procesarea numerică include medierea pe 128 cicluri de semnal (ENOB). Se consideră zgomot alb cu medie nulă.

Rezolvare:

$$RSZ_{intrare}|_{dB} = 6,02 \cdot 4 + 1,75 = 25,83 \text{ dB}$$

$$RSZ_{intrare}|_{dB} = 25,83 \text{ dB} \Rightarrow RSZ_{intrare} = 10^{\frac{25,83}{10}} = 10^{2,583} = 382,82 \quad (321)$$

În cazul zgomotului tratat în această problemă, procesul de mediere îmbunătățește raportul semnal zgomot conform:

$$RSZ_{ieșire} = M \cdot RSZ_{intrare} = 128 \cdot 382,82 = 49000,96 \Rightarrow$$

$$RSZ_{ieșire}|_{dB} = 10 \cdot \log(49000,96) = 46,9 \text{ dB} \quad (322)$$

$$RSZ|_{dB} = 6,02 \cdot ENOB + 1,75 \quad (323)$$

$$ENOB = \frac{RSZ_{ieșire}|_{dB} - 1,75}{6,02} = \frac{46,9 \text{ dB} - 1,75}{6,02} = 7,5 \Rightarrow \text{CNA dimensionat pe 8 biți} \quad (324)$$

Capitolul 3. Măsurarea tensiunilor

APLICATII

Problema 3.1. Un voltmetru de curent continuu cu convertor analog-numeric dublă pantă are tensiunea de referință $U_R = 10 \text{ V}$, frecvența semnalului de tact $f_{ck} = 1 \text{ MHz}$ și tensiunea de capăt de scară $U_{CS} = 10 \text{ V}$. Amplificatorul operațional din etajul integrator are tensiunea de ieșire limită de $\pm 10 \text{ V}$, numărul încărcat inițial în numărător este $N_1 = 20000$ și tensiunea de intrare este $U_{in} = 5 \text{ V}$. Peste tensiunea continuă măsurată este suprapusă o tensiune perturbatoare armonică având frecvența $f = 10 \text{ kHz} \pm 1\%$ și amplitudinea $U_{ps} = 10 \text{ V}$. Se cere:

- Să se determine valoarea indicată de numărător pentru tensiunea U_{in} . Dacă rezistența integratorului este $R = 10 \text{ k}\Omega$, să se determine valoarea capacității.
- Să se calculeze raportul de rejecție serie obținut prin integrare, RSS_i . Pentru ce valori ale frecvenței semnalului perturbator RSS_i este maxim? Pentru mărirea rejecției perturbațiilor alternative se utilizează un filtru cu funcția de transfer $\frac{1}{1+j\omega RC}$, având $f_{-3 \text{ dB}} = 5 \text{ Hz}$. Calculați RSS_{FTJ} și eroarea absolută maximă datorată tensiunii perturbatoare.

Rezolvare:

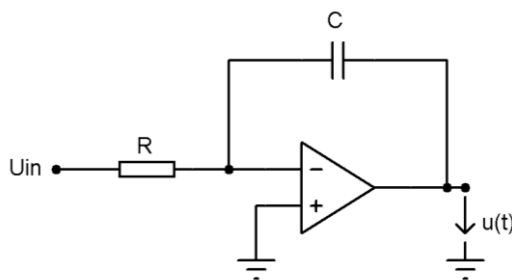


Fig. 62. Circuit integrator realizat cu amplificator operațional.

- Pentru detaliile funcționării unui convertor analog-numeric dublă pantă se va relua problema 1.26.

Faza 1:

$$u(t) = -\frac{1}{RC} \cdot \int_0^{t_1} U_{in} dt \Rightarrow u(t_1) = -\frac{U_{in}}{RC} \cdot t_1 \quad (325)$$

Se va observa în figura 52 faptul că la acest tip de convertor tensiunea de referință se aplică cu semn opus față de tensiunea de măsurat.

Faza 2:

$$u(t_1 + t_x) = -\frac{1}{RC} \cdot U_{in} \cdot t_1 - \left(\frac{1}{RC} \cdot (-U_R) \cdot t_x \right) \Rightarrow u(t_1 + t_x) = -\frac{U_{in}}{RC} \cdot t_1 + \frac{U_R}{RC} \cdot t_x \quad (326)$$

La sfârșitul fazei 2:

$$\begin{aligned} u(t_1 + t_x) = 0 &\Rightarrow \frac{U_{in}}{RC} \cdot t_1 = \frac{U_R}{RC} \cdot t_x \Rightarrow U_{in} \cdot t_1 = U_R \cdot t_x \Rightarrow U_{in} \cdot N_1 \cdot T_{ck} = U_R \cdot N_x \cdot T_{ck} \Rightarrow \\ &\Rightarrow N_x = \frac{U_{in}}{U_R} \cdot N_1 = \frac{5 \text{ V}}{10 \text{ V}} \cdot 20000 = 10000 \end{aligned} \quad (327)$$

Durata de integrare este:

$$t_1 = N_1 \cdot T_{ck} = \frac{N_1}{f_{ck}} \Rightarrow t_1 = \frac{20000}{1 \text{ MHz}} \Rightarrow t_1 = 2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 20 \text{ ms} \quad (328)$$

$$|u(t_1)|_{max} = 10 \text{ V} \Rightarrow \left| -\frac{V_{IN}}{RC} \cdot t_1 \right| = 10 \text{ V} \Rightarrow \frac{V_{IN}}{RC} \cdot t_1 = 10 \text{ V} \Rightarrow \frac{1}{RC} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ s} \cdot 5 \text{ V} = 10 \text{ V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow RC = \frac{100 \cdot 10^{-3} \text{ s}}{10} = 10 \text{ ms} \quad (329)$$

$$\text{Înlocuind } R = 10 \text{ k}\Omega \text{ în relația (329) rezultă } C = \frac{10 \text{ ms}}{10 \text{ k}\Omega} = \frac{10^{-3}}{10^3} \text{ F} \Rightarrow C = 1 \text{ }\mu\text{F} \quad (330)$$

b) Pentru detalii despre acest subpunct se va relua problema 1.25.

Raportul de rejecție serie prin integrare se calculează folosind formula (331):

$$RRS_i = -20 \lg \left(\left| \text{sinc} \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) \right| \right) \quad (331)$$

Valoarea maximă a RRS_i se obține atunci când argumentul logaritmului este zero. Se pot determina frecvențele semnalului armonic perturbator pentru care se întâmplă acest lucru:

$$\sin \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\omega t_1}{2} = k\pi \Rightarrow \frac{2\pi f t_1}{2} = k\pi \Rightarrow f = \frac{k}{t_1} = \frac{k}{20 \cdot 10^{-3}} = k \cdot 50 \text{ Hz} \quad (332)$$

Valoarea minimă a RRS_i se obține în cazul opus, adică $\sin \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) = 1$. În acest caz, frecvențele la care RRS_i este minim vor fi:

$$\sin \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) = 1 \Rightarrow \frac{\omega t_1}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow f = \frac{k}{t_1} + \frac{1}{2t_1} = k \cdot 50 + 25 \text{ Hz}$$

Graficul care va trece prin punctele de minim ale graficului RRS_i se poate afla:

$$RRS_i = -20 \lg \left(\left| \frac{\sin \left(\frac{\omega t_1}{2} \right)}{\frac{\omega t_1}{2}} \right| \right) \xrightarrow{\sin \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) = 1} RRS_i = 20 \lg \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) \quad (333)$$

Este foarte important de observat că funcția care descrie acest grafic este crescătoare cu frecvența.

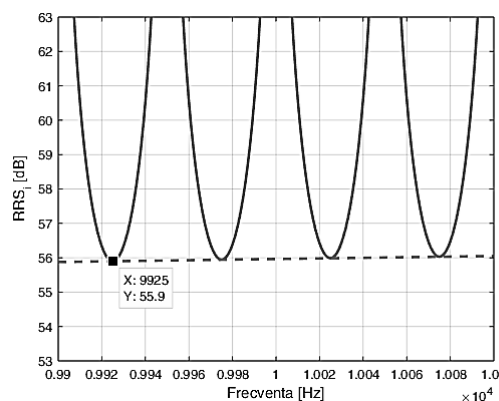


Fig. 63. Graficul RRS_i pentru domeniul în care poate varia frecvența semnalului perturbator (linie continuă). Grafic RRS_i minim (linie punctată).

$$f = 10 \text{ kHz} \pm 1\% \Rightarrow f_{RRS_{i_{min}}} = 9925 \text{ Hz} \Rightarrow RRS_{i_{min}} = 20 \lg \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) = 20 \lg \left(\pi f_{RRS_{i_{min}}} t_1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow RSS_{i_{min}} = 20 \lg(\pi \cdot 9925 \cdot 20 \cdot 10^{-3}) \cong 56 \text{ dB} \quad (334)$$

$$RSS_{FTJ} = 20 \lg \left(\frac{1}{|H(\omega)|} \right) \left\{ \begin{array}{l} |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow RSS_{FTJ} = 20 \lg(\sqrt{1+(\omega RC)^2}) \quad (335)$$

$$\text{Cum } f_{-3dB} = \frac{1}{2\pi RC} \Rightarrow RC = \frac{1}{2\pi f_{-3dB}} \quad (336)$$

$$\text{Înlocuind relația (336) în relația (335) rezultă } RSS_{FTJ} = 20 \lg \left(\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi f}{2\pi f_{-3dB}} \right)^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow RSS_{FTJ} = 20 \lg \left(\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_{-3dB}} \right)^2} \right) \xrightarrow{\left(\frac{f}{f_{-3dB}} \right)^2 \gg 1} RSS_{FTJ} \cong 20 \lg \left(\frac{f}{f_{-3dB}} \right) \quad (337)$$

Înlocuind în relația (337) valoarea determinată a frecvenței semnalului perturbator și frecvența de tăiere din enunț, rezultă:

$$RSS_{FTJ} = 20 \lg \left(\frac{9900}{5} \right) = 65.93 \text{ dB} \quad (338)$$

$$RSS_{min|dB} = RSS_{i_{min}} + RSS_{FTJ} = 56 \text{ dB} + 65.93 \text{ dB} = 121.93 \Rightarrow RSS_{min} = 10^{\frac{121.93}{20}} = 10^{6.09} \quad (339)$$

$$RSS = \frac{U_{ps}}{U_{c.c. \text{ determinată}}} \Rightarrow U_{c.c. \text{ determinată}} = \frac{U_{ps}}{RSS_{min}} = \frac{10 \text{ V}}{10^{6.1}} \cong 8 \mu\text{V} = e_{max} \quad (340)$$

Problema 3.2. Cu un voltmetru numeric având scări pentru măsurarea tensiunilor continue și alternative, cu redresor dublă alternanță pentru determinarea valorii medii absolute în vederea calculului valorii efective, se fac următoarele măsuratori pentru tensiunea periodică din figură: pe scara de curent continuu de măsoară $U_{cc} = 4 \text{ V}$, iar pe scara de curent alternativ se măsoară $U_{ef} = 7,77 \text{ V}$. Se cere:

- Stiind că pe scara de curent alternativ voltmetrul este etalonat în valori efective pentru semnal sinusoidal, să se calculeze tensiunile E_1 și E_2 dacă $\tau = \frac{T}{2}$.
- Ce va indica voltmetrul pentru semnalul cu valorile E_1 și E_2 determinate anterior, dar $\tau = \frac{T}{3}$?

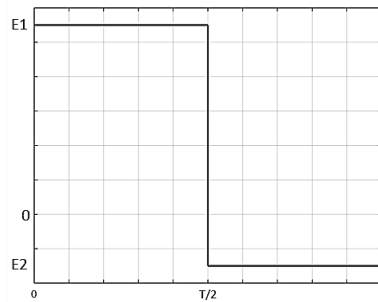


Fig. 64. Semnalul măsurat.

Rezolvare:

- Pe scara de curent continuu voltmetrul măsoară valoarea medie a semnalului de intrare.

$$U_1 = \overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^\tau E_1 dt + \int_\tau^T E_2 dt \right) = \frac{1}{T} (E_1 \tau + E_2 (T - \tau)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{1}{T} \left(E_1 \cdot \frac{T}{2} + E_2 \cdot \frac{T}{2} \right) = \frac{1}{T} \cdot T \left(\frac{E_1 + E_2}{2} \right) = \frac{E_1 + E_2}{2} \Rightarrow E_1 + E_2 = 2 \cdot U_{cc} = 2 \cdot 4 \text{ V} = 8 \text{ V} \quad (341)$$

În curent alternativ voltmetrul măsoară valoarea medie absolută a semnalului, apoi o convertește la valoarea efectivă cu ajutorul factorului de formă pentru semnalul sinusoidal.

$$\left. \begin{aligned} U_{ef} &= k_F^{sin} \cdot U_{ma} \Rightarrow U_{ma} = \frac{U_{ef}}{k_F^{sin}} \\ k_F^{sin} &= 1,11 \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_{ma} = \frac{7,77 \text{ V}}{1,11} = 7 \text{ V} \quad (342)$$

$$\begin{aligned} U_{ma} &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |u(t)| dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^\tau |E_1| dt + \int_\tau^T |E_2| dt \right) = \frac{1}{T} \left(\int_0^\tau E_1 dt - \int_\tau^T E_2 dt \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow U_{ma} &= \frac{1}{T} (E_1 \tau - E_2 (T - \tau)) = \frac{1}{T} \left(E_1 \cdot \frac{T}{2} - E_2 \cdot \frac{T}{2} \right) = \frac{E_1 - E_2}{2} \Rightarrow E_1 - E_2 = 2 \cdot U_{ma} \end{aligned} \quad (343)$$

$$\text{Înlocuind relația (342) în relația (343) rezultă } E_1 - E_2 = 2 \cdot 7 \text{ V} = 14 \text{ V} \quad (344)$$

Se formează sistemul de ecuații cu ajutorul relațiilor (341) și (344):

$$\begin{aligned} \begin{cases} E_1 + E_2 = 8 \text{ V} \\ E_1 - E_2 = 14 \text{ V} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} E_1 + E_2 = 8 \text{ V} \\ E_1 = 14 \text{ V} + E_2 \end{cases} \Rightarrow 14 \text{ V} + E_2 + E_2 = 8 \text{ V} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2E_2 = -6 \text{ V} \Rightarrow E_2 = -3 \text{ V} \\ E_1 = 14 \text{ V} - 3 \text{ V} = 11 \text{ V} \end{cases} \end{aligned} \quad (345)$$

b)

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{T} \left(\int_0^\tau E_1 dt + \int_\tau^T E_2 dt \right) = \frac{1}{T} (E_1 \tau + E_2 (T - \tau)) = \frac{1}{T} \left(E_1 \cdot \frac{T}{3} + E_2 \cdot \frac{2 \cdot T}{3} \right) = \frac{E_1 + 2 \cdot E_2}{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_1 + 2 \cdot E_2 = 3 \cdot U_{cc} \end{aligned} \quad (346)$$

$$\begin{aligned} U_{ma} &= \frac{1}{T} \left(\int_0^\tau |E_1| dt + \int_\tau^T |E_2| dt \right) = \frac{1}{T} \left(\int_0^\tau E_1 dt - \int_\tau^T E_2 dt \right) = \frac{1}{T} (E_1 \tau - E_2 (T - \tau)) \Rightarrow \\ \Rightarrow U_{ma} &= \frac{1}{T} \left(E_1 \cdot \frac{T}{3} - E_2 \cdot \frac{2 \cdot T}{3} \right) = \frac{E_1 - 2 \cdot E_2}{3} \Rightarrow E_1 - 2 \cdot E_2 = 3 \cdot U_{ma} \end{aligned} \quad (347)$$

Se formează sistemul de ecuații cu ajutorul relațiilor (345), (346) și (347):

$$\begin{aligned} \begin{cases} E_1 + 2 \cdot E_2 = 3 \cdot U_{cc} \\ E_1 - 2 \cdot E_2 = 3 \cdot U_{ma} \\ E_1 = 11 \text{ V} \\ E_2 = -3 \text{ V} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 11 \text{ V} + 2 \cdot (-3 \text{ V}) = 3 \cdot U_{cc} \\ 11 \text{ V} - 2 \cdot (-3 \text{ V}) = 3 \cdot U_{ma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot U_{cc} = 5 \text{ V} \\ 3 \cdot U_{ma} = 17 \text{ V} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} U_{cc} = \frac{5 \text{ V}}{3} = 1,66 \text{ V} \\ U_{ma} = \frac{17 \text{ V}}{3} = 5,66 \text{ V} \end{cases} &\Rightarrow U_2 = k_F^{sin} \cdot U_{ma} \Rightarrow U_2 = 1,11 \cdot 5,66 \text{ V} = 6,29 \text{ V} \end{aligned} \quad (348)$$

Problema 3.3. Se dă voltmetrul de valori pseudo-efective din figură. Blocul U.M. este un voltmetru de valori medii absolute cu redresor dublă alternanță, iar blocul U.V. este un voltmetru de valori de vârf. Se cere:

- a) Să se dimensioneze R_1 și R_2 astfel încât voltmetrul să măsoare tensiunea efectivă pentru semnalele sinusoidale și dreptunghiulare cu medie nulă și factor de umplere $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$. Rezistența R_3 are valoarea de 10 kΩ.

- b) Să se determine eroarea făcută de acest voltmetru la măsurarea unei tensiuni triunghiulare simetrice.

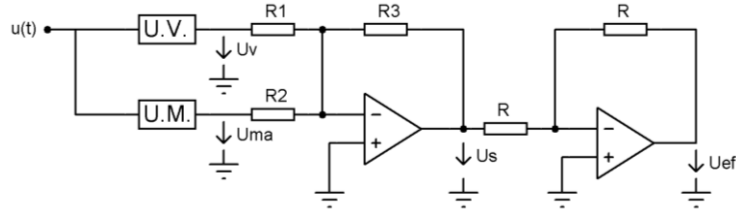


Fig. 65. Voltmetrul de valori pseudo-efective.

Rezolvare:

Se cunosc $k_F^{\sin}=1,11$, $k_V^{\sin}=1,41$, $k_F^d=k_V^d=1$, unde $k_F^{\sin}$ este factorul de formă pentru semnal sinusoidal, $k_V^{\sin}$ este factorul de vârf pentru semnal sinusoidal, k_F^d este factorul de formă pentru semnal dreptunghiular și k_V^d este factorul de vârf pentru semnal dreptunghiular.

a) Primul amplificator inversor face parte dintr-un etaj sumator inversor alături de rezistențele R1, R2 și R3. Al doilea amplificator operațional și cele două rezistențe notate R formează un amplificator inversor cu amplificare unitară în modul. Se poate scrie:

$$U_{ef} = -U_s = -\left(-\frac{R_3}{R_1} \cdot U_v - \frac{R_3}{R_2} \cdot U_{ma}\right) = k_1 \cdot U_v + k_2 \cdot U_{ma} \quad (349)$$

Tratând separat cele două tipuri de semnale (sinusoidal și dreptunghiular) rezultă sistemul:

$$\begin{cases} U_{ef}^{\sin} = k_1 \cdot U_v^{\sin} + k_2 \cdot U_{ma}^{\sin} & \left| \frac{1}{U_{ef}^{\sin}} \right. \\ U_{ef}^d = k_1 \cdot U_v^d + k_2 \cdot U_{ma}^d & \left| \frac{1}{U_{ef}^d} \right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = k_1 \cdot k_V^{\sin} + k_2 \cdot \frac{1}{k_F^{\sin}} \\ 1 = k_1 \cdot k_V^d + k_2 \cdot \frac{1}{k_F^d} \end{cases} \quad (350)$$

$$k_1 = \frac{k_F^{\sin} - k_F^d}{k_V^{\sin} \cdot k_F^{\sin} - k_V^d \cdot k_F^d} \cong 0,19 \Rightarrow \frac{R_3}{R_1} = 0,19 \Rightarrow R_1 = \frac{10}{0,19} = 52,63 \text{ k}\Omega \quad (351)$$

$$k_2 = (1 - k_1 \cdot k_V^d) \cdot k_F^d \cong 0,81 \Rightarrow \frac{R_3}{R_2} = 0,81 \Rightarrow R_2 = \frac{10}{0,81} = 12,34 \text{ k}\Omega \quad (352)$$

b) Pentru semnalul triunghiular simetric cu amplitudinea A se cunosc $U_v^{\text{triunghiular}} = A$, $U_{ma}^{\text{triunghiular}} = \frac{A}{2}$, $U_{ef}^{\text{teoretic}} = \frac{A}{\sqrt{3}}$. Valoarea efectivă măsurată cu acest aparat va fi:

$$U_{ef}^{\text{triunghiular}} = k_1 \cdot U_v^{\text{triunghiular}} + k_2 \cdot U_{ma}^{\text{triunghiular}} = 0,19 \cdot A + 0,81 \cdot \frac{A}{2} \quad (353)$$

$$\varepsilon = \frac{|U_{ef}^{\text{măsurat}} - U_{ef}^{\text{teoretic}}|}{U_{ef}^{\text{teoretic}}} \cdot 100\% = \frac{|0,19 \cdot A + 0,81 \cdot \frac{A}{2} - \frac{A}{\sqrt{3}}|}{\frac{A}{\sqrt{3}}} = 0,0305 \cdot 100\% = 3,05\% \quad (354)$$

Problema 3.4. Cu un voltmetru de curent continuu se măsoară tensiunea între punctele B și A din figura 66. Voltmetrul are raportul de rejecție de mod comun de curent continuu $RRMC_{cc}$ de 80 dB și de curent alternativ $RRMC_{ca}$ de 40 dB și folosește un convertor analog-numeric dublă pantă cu durată integrării tensiunii de intrare de $t_1 = 20 \text{ ms}$. Se cunosc $u(t) = U \cdot \cos^2(2\pi f_p t)$ cu $U = 200 \text{ V}$ și $f_p = 1 \text{ kHz} \pm 5\%$. Se cere eroarea absolută maximă în măsurarea tensiunii E cauzată de sursa $u(t)$.

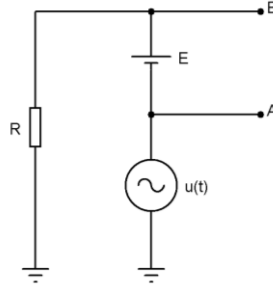


Fig. 66. Circuitul asupra căruia se realizează măsurătoarea

Rezolvare:

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= U \cdot \cos^2(\omega t) \\ \cos^2(\omega_p t) &= \frac{1 + \cos(2 \cdot \omega_p t)}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow u(t) = \frac{U \cdot (1 + \cos(2 \cdot \omega_p t))}{2} = \frac{U}{2} + \frac{\cos(2 \cdot \omega_p t)}{2} \quad (355)$$

Se observă că sursa $u(t)$ contribuie cu o tensiune perturbatoare continuă $\left(\frac{U}{2}\right)$ și cu o tensiune perturbatoare alternativă $\left(\frac{\cos(2 \cdot \omega_p t)}{2}\right)$. Raportul de rejecție a modului comun este „un instrument de apărare” al voltmetrului la aceste tensiuni perturbatoare. Așadar efectul fiecărei componente a perturbației $u(t)$ asupra măsurării tensiunii E va fi determinat utilizând raportul de rejecție corespunzător. Aceste efecte sunt notate U_{pcc} pentru componenta de curent continuu și U_{pca} pentru componenta de curent alternativ.

$$RRMC_{cc}|_{dB} = 80 \text{ dB} \Rightarrow RRMC_{cc} = 10^{\frac{80}{20}} = 10^4 \quad (356)$$

$$U_{pcc} = \frac{U}{2} \cdot \frac{1}{RRMC_{cc}} = \frac{200}{2} \cdot \frac{1}{10^4} = 10^{-2} = 10 \text{ mV} \quad (357)$$

$$RRMC_{ca}|_{dB} = 40 \Rightarrow RRMC_{ca} = 10^{\frac{40}{20}} = 10^2 \quad (358)$$

$$U_{pca} = \frac{U}{2} \cdot \frac{1}{RRMC_{ca}} = \frac{200}{2} \cdot \frac{1}{10^2} = 1 \text{ V} \quad (359)$$

Așadar la bornele voltmetrului care măsoară tensiunea E vor ajunge și două perturbații: U_{pcc} și U_{pca} . Deoarece voltmetrul este bazat pe un convertor analog-numeric dublă pantă, acesta mai are un „mecanism de apărare” față de perturbațiile alternative și anume raportul de rejecție serie, RRS . Așadar U_{pca} va fi atenuată mai departe astfel:

$$RRS = -20 \lg \left(\left| \text{sinc} \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) \right| \right) = -20 \lg \left(\left| \frac{\sin \left(\frac{\omega t_1}{2} \right)}{\frac{\omega t_1}{2}} \right| \right) \quad (360)$$

RRS este maxim atunci când argumentul logaritmului este nul:

$$\sin \left(\frac{\omega t_1}{2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\omega t_1}{2} = k\pi \Rightarrow \frac{2\pi f t_1}{2} = k\pi \Rightarrow f = \frac{k}{t_1} = \frac{k}{20 \cdot 10^{-3}} = k \cdot 50 \text{ Hz} \quad (361)$$

Adică atunci când la intrarea convertorului se aplică o tensiune armonică cu frecvența egală cu un multiplu de 50 Hz, aceasta nu va afecta măsurătoarea.

Este foarte important să se observe că atunci când semnalul perturbator ($u(t) = \cos^2(\omega_p t)$) are pulsația ω_p , acesta va determina o perturbație de curent continuu (care a fost deja tratată și nu prezintă interes în cele ce se doresc a fi arătate aici) și o perturbație armonică de pulsație dublă, $2\omega_p$.

Ținând cont de acest fapt, frecvențele semnalului perturbator $u(t)$ care determină perturbații armonice ale căror frecvențe respectă relația (361) vor fi multipli de 25 Hz.

Expresia RRS în aceste condiții devine:

$$RRS = -20 \lg \left(\left| \frac{\sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)}{\frac{\omega t_1}{2}} \right| \right) = -20 \lg \left(\left| \frac{\sin\left(\frac{2\omega_p t_1}{2}\right)}{\frac{2\omega_p t_1}{2}} \right| \right) = -20 \lg \left(\left| \frac{\sin(\omega_p t_1)}{\omega_p t_1} \right| \right) \quad (362)$$

În figura de mai jos a fost reprezentat graficul RRS pentru intervalul de frecvențe în care poate varia frecvența semnalului perturbator și anume $f_p = 1 \text{ kHz} \pm 5\% = [950, 1050] \text{ Hz}$.

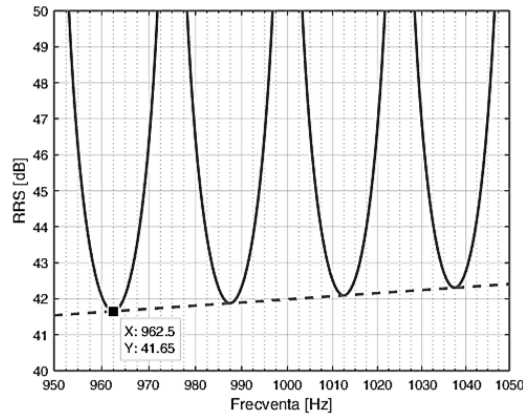


Fig. 67. Graficul RRS pentru domeniul în care poate varia frecvența semnalului perturbator $u(t)$ (linie continuă). RRS minim (linie punctată).

Frecvențele semnalului perturbator $u(t)$ pentru care RRS va fi minim se pot afla impunând condiția $\sin(\omega_p t_1) = 1$ în relația (360).

$$\sin(\omega_p t_1) = 1 \Rightarrow \omega_p t_1 = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow f = \frac{k}{2t_1} + \frac{1}{4t_1} = k \cdot 25 + 12,5 \text{ Hz} \quad (363)$$

Considerând cazul cel mai defavorabil din intervalul în care poate varia frecvența semnalului perturbator, adică atunci când frecvența semnalului perturbator $u(t)$ este 962,5 Hz (așa cum se poate observa și din graficul prezentat în figura 67, la această frecvență RRS este minim), rezultă:

$$\Rightarrow RRS_{min}|_{dB} = 20 \lg(2\pi \cdot 962,5 \cdot 2 \cdot 10^{-2}) = 41,65 \text{ dB} \quad (364)$$

$$RSS_{min} = 10^{\frac{41,65}{20}} = 10^{2,0825} = 120,92 \quad (365)$$

$$U'_{pca} = \frac{U_{pca}}{RSS_{min}} = \frac{1}{120,92} = 8,3 \text{ mV} \quad (366)$$

$$e_{max} = U_{pcc} + U'_{pca} = 10 \text{ mV} + 8,3 \text{ mV} = 18,3 \text{ mV} \quad (367)$$

Capitolul 4. Măsurarea impedanțelor

APLICATII

Problema 4.1. Se măsoară R_x cu o punte Wheatstone. La echilibrul punții valorile rezistențelor din celelalte brațe sunt $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 0,1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 100 \text{ k}\Omega$. Se cunosc rezistențele de scurgere $R_{s1} = R_{s2} = 100 \text{ M}\Omega$.

- Pe ce diagonală se conectează voltmetrul?
- Determinați eroarea cauzată de rezistențele de scurgere făcută la măsurarea lui R_x în condițiile date.
- Cum se poate conecta borna de gardă pentru a obține o eroare de măsură cât mai mică?

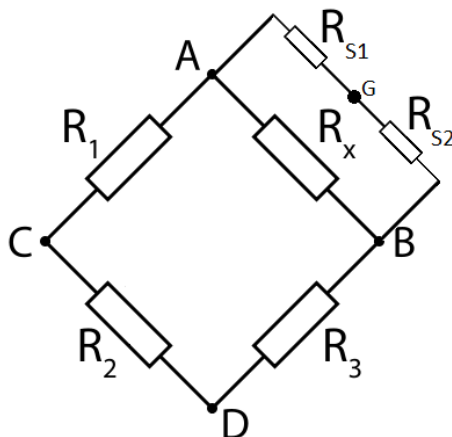


Fig. 68. Puntea Wheastone.

Rezolvare:

a) Voltmetrul se va conecta pe diagonală cu sensibilitate maximă. Sensibilitatea unei punți Wheatstone se determină cu ajutorul relației:

$$S = \frac{A}{(1+A)^2} \quad (368)$$

unde A este numit raportul punții pentru diagonală respectivă și se calculează ca raportul a oricare două rezistențe conectate într-un punct care se află și pe diagonală pentru care se efectuează calculul.

Determinarea sensibilității diagonalei AD se face în felul următor: se calculează întâi raportul punții pentru diagonală respectivă. Acesta poate fi calculat fie ca $A = \frac{R_1}{R_x}$, fie ca $A = \frac{R_x}{R_1}$ (se observă că R_1 și R_x sunt conectate în punctul A care face parte din diagonală AD) sau ca $A = \frac{R_2}{R_3}$ sau $A = \frac{R_3}{R_2}$ (se observă că R_2 și R_3 sunt conectate în punctul D care face parte din diagonală AD). Este evident că se va folosi unul din ultimele două rapoarte prezentate din simplul fapt că ele nu conțin rezistența necunoscută R_x . Se poate folosi oricare din cele două. Așadar, de exemplu:

$$A = \frac{R_3}{R_2} = \frac{100 \text{ k}\Omega}{0,1 \text{ k}\Omega} = 1000 \Rightarrow S_{AD} = \frac{A}{(1+A)^2} = \frac{1000}{(1+1000)^2} \cong \frac{10^3}{10^6} = 10^{-3} \quad (369)$$

Pentru a determina sensibilitatea diagonalei CB se procedează similar. Se determină raportul punții cu una din următoarele patru formule: $A = \frac{R_1}{R_2}$, $A = \frac{R_2}{R_1}$, $A = \frac{R_x}{R_3}$, $A = \frac{R_3}{R_x}$. Se va alege unul din primele două rapoarte deoarece nu conțin R_x . Dacă se alege, de exemplu, $A = \frac{R_1}{R_2}$ rezultă:

$$A = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1 \text{ k}\Omega}{0,1 \text{ k}\Omega} = 10 \Rightarrow S_{BC} = \frac{A}{(1+A)^2} = \frac{10}{(11)^2} = \frac{10}{121} = 0,082 = 82 \cdot 10^{-3} > S_{AD} \quad (370)$$

Diagonala BC are o sensibilitate mai mare decât diagonala AD. Voltmetrul se va conecta pe diagonala BC. Schema finală a punții Wheastone va fi:

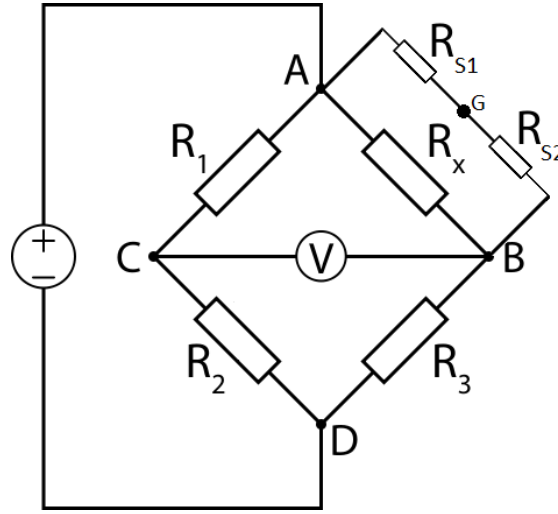


Fig. 69. Puntea Wheastone cu voltmetrul conectat corect.

Sensibilitatea are un punct de maxim în $A=1$. Se poate determina mai rapid care este diagonala cu sensibilitate mai mare fără a calcula efectiv sensibilitatea, ci numai raportul punții. Diagonala cu sensibilitate mai mare va fi aceea pentru care raportul punții este mai apropiat de 1. Acest lucru se confirmă și în problema de față. Este evident că valoarea maximă a sensibilității este 0.25. Aceste cunoștințe ajută la determinarea eventualelor greșeli de calcul care pot să apară în rezolvarea acestui tip de probleme.

b) Pentru a determina eroarea cauzată de rezistențele R_{S1} și R_{S2} se va determina valoarea rezistenței R_x în cazul ideal în care nu ar exista în circuit cele două rezistențe de scurgere, apoi se va determina R_x în cazul în care se ia în considerare efectul celor două rezistențe de scurgere. Folosind cele două rezultate se poate determina eroarea:

$$\varepsilon = \frac{|R_{xideal} - R_{xcu R_{S1} \text{ și } R_{S2}}|}{R_{xideal}} \cdot 100\% \quad (371)$$

Dacă se face abstracție de cele două rezistențe de scurgere se poate determina valoarea rezistenței R_{xideal} ținând cont de faptul că se cunosc valorile celorlalte rezistențe când puntea este la echilibru. La echilibru, în cazul unei punți Wheastone, este valabilă relația:

$$R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_x \Rightarrow R_x = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} = \frac{1 \cdot 100}{0,1} = 1000 \text{ k}\Omega = 1 \text{ M}\Omega \quad (372)$$

În cazul considerării și a rezistențelor de scurgere:

$$R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_x \parallel (R_{S1} + R_{S2}) \Leftrightarrow R_1 \cdot R_3 = R_2 \frac{R_x \cdot (R_{S1} + R_{S2})}{R_x + (R_{S1} + R_{S2})} \quad (373)$$

$$R_x = \frac{-R_1 \cdot R_3 \cdot (R_{S1} + R_{S2})}{R_1 \cdot R_3 - R_2 \cdot (R_{S1} + R_{S2})} = 1,005 \text{ M}\Omega \quad (374)$$

$$\varepsilon = \frac{|R_{xideal} - R_{xcu R_{S1} \text{ și } R_{S2}}|}{R_{xideal}} \cdot 100\% = \frac{|1 - 1,005|}{1} \cdot 100\% = 0,5\% \quad (375)$$

c) Se va determina la care dintre bornele A, B, C și D trebuie să se lege borna de gardă G pentru a obține o eroare de măsură cât mai mică a rezistenței R_x . Este important să se înțeleagă faptul că, în cazul ideal, rezistențele R_{S1} și R_{S2} nu ar apărea în circuit, adică ele ar fi înlocuite cu o rezistență de valoare infinită. Cu alte cuvinte, cu cât este mai mică rezistența echivalentă legată în paralel cu rezistența de măsurat R_x , cu atât efectul acesteia va fi mai mare și va cauza erori de măsură mai mari (practic schema se va îndepărta mai mult de la forma ideală cu cât rezistența echivalentă legată în paralel cu R_x scade).

În cazul în care borna de gardă nu este legată la niciuna din bornele A, B, C sau D așa cum se observă în figura 69, în paralel cu rezistența R_x se va găsi gruparea serie $R_{S1} + R_{S2}$. Dacă borna G se leagă la borna A, schema rezultată va fi:

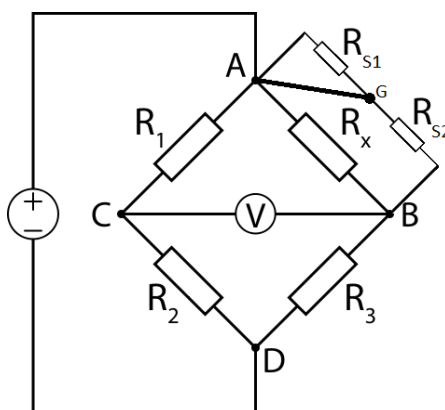


Fig. 70. Puntea Wheastone rezultată în urma conectării borei de gardă la borna A.

În acest caz rezistența R_{S1} este scurtcircuitată, deci în paralel cu rezistența R_x se va găsi numai rezistența R_{S2} care este mai mică decât rezistența echivalentă serie $R_{S1} + R_{S2}$ din cazul în care borna G nu era legată una din bornele punții, deci acest caz este clar dezavantajos și nu merita tratat prin calcul. Absolut identic este și cazul legării bornei de gardă la borna B a punții.

Rămân de tratat numai două cazuri: legarea bornei de gardă la borna C a punții și legarea bornei de gardă la borna D a punții.

Dacă borna de gardă se leagă la borna C a punții rezultă schema următoare:

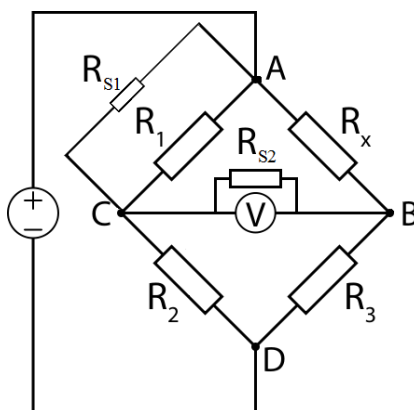


Fig. 71. Schema care rezultă prin conectarea bornei de gardă la borna C a punții.

Atunci când puntea este la echilibru tensiunea măsurată de voltmetru este nulă. Rezistența R_{S2} este conectată în paralel cu voltmetrul, deci tensiunea pe aceasta este nulă, prin ea nu trece

curent, deci ea poate fi eliminată din circuit fără a afecta funcționarea acestuia. Rezistența R_x va fi determinată ca la punctul b) pe schema din figura 71.

$$R_1 \parallel R_{S1} \cdot R_3 = R_2 \cdot R_{x_{GC}} \Rightarrow R_{x_{GC}} = \frac{R_1 \parallel R_{S1} \cdot R_3}{R_2} = \frac{\frac{R_1 \cdot R_{S1}}{R_1 + R_{S1}} \cdot R_3}{R_2} =$$

$$\frac{\frac{1 \cdot 100000}{1+100000} \cdot 100}{0,1} = \frac{99,999}{0,1} = 999,99 \text{ k}\Omega \quad (376)$$

Eroarea făcută în acest caz este:

$$\varepsilon = \frac{|R_{x_{ideal}} - R_{x_{GC}}|}{R_{x_{ideal}}} \cdot 100\% = \frac{|1000 - 999,99|}{1000} \cdot 100\% = 0.001\% \quad (377)$$

Dacă borna G se leagă la borna D a punții rezultă următoarea schemă:

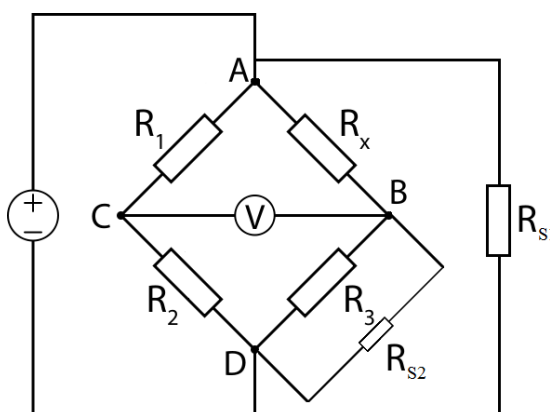


Fig. 72. Schema care rezultă prin conectarea bornei de gardă la borna D a punții.

Rezistența R_{S1} este conectată în paralel cu puntea Wheastone. Practic ea reprezintă un alt consumator pentru sursa de alimentare. Prezența sau absența ei nu afectează funcționarea punții Wheastone. Rezistența R_x va fi determinată ca la punctul b) pe schema din figura 72.

$$R_1 \cdot R_3 \parallel R_{S2} = R_2 \cdot R_{x_{GD}} \Rightarrow R_{x_{GD}} = \frac{R_1 \cdot \frac{R_3 \cdot R_{S2}}{R_3 + R_{S2}}}{R_2} =$$

$$\frac{1 \cdot \frac{100 \cdot 100000}{100+100000}}{0,1} = \frac{99,9}{0,1} = 999 \text{ k}\Omega \quad (378)$$

Eroarea făcută în acest caz este:

$$\varepsilon = \frac{|R_{x_{ideal}} - R_{x_{GD}}|}{R_{x_{ideal}}} \cdot 100\% = \frac{|1000 - 999|}{1000} \cdot 100\% = 0.1\% \quad (379)$$

Așadar eroarea cea mai mică se obține prin conectarea bornei de gardă la borna C a punții.

La această concluzie se putea ajunge si fără a calcula. Rezistențele de scurgere au valori de 100 MΩ. O grupare paralel este dominată de rezistența cu valoarea cea mai mică. În primul caz (G conectat la C) puntea diferă de configurația ideală prin conectarea unei rezistențe de scurgere în paralel

cu rezistența R_1 de 1 k Ω . În al doilea caz (G conectat la D) puntea diferă de configurația ideală prin conectarea unei rezistențe de scurgere în paralel cu rezistența R_3 de 100 k Ω . Rezistența R_1 va avea un efect mai puternic în stabilirea valorii rezistenței echivalente a grupării paralel rezultată decât rezistența R_3 (R_1 este de valoare mai mică decât R_3). Așadar în primul caz puntea va diferi mai puțin față de configurația ideală decât în al doilea caz.

Problema 4.2. O rezistență $R_x \in (0,1; 1) \Omega$ se măsoară la o punte Wheatstone. La echilibru, celălalte rezistențe sunt $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 85 \Omega$. Cum se conectează voltmetrul? Pentru rezistențe se cunosc toleranțele: $\varepsilon_{R_1} = \varepsilon_{R_2} = 0,1 \%$, $\varepsilon_{R_3} = 0,001 \%$. Se cere:

- Să se calculeze R_x și eroarea dacă terminalele au $r = 0,05 \Omega$ și măsurarea este cuadripolară.
- Să se calculeze R_x și eroarea dacă terminalele au $r = 0,05 \Omega$ și măsurarea este bipolară.

Rezolvare:

Schema punții Wheatstone din problemă este următoarea:

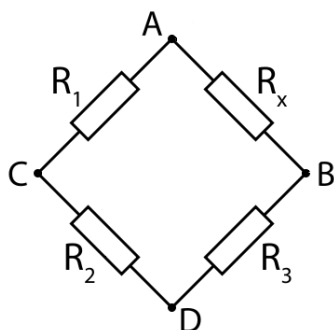


Fig. 73. Puntea Wheatstone în vederea determinării diagonalei pe care se va conecta voltmetrul.

a) Se determină diagonala pe care se conectează voltmetrul prin determinarea raportului punții pentru fiecare dintre cele două diagonale așa cum s-a arătat la problema 4.1, alegându-se diagonala cu raportul punții cel mai apropiat de 1.

$$A_{AD} = \frac{R_2}{R_3} = \frac{100}{0.085} = 1176,47 \quad (380)$$

$$A_{BC} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{100}{1} = 100 \quad (381)$$

Diagonala cu sensibilitatea cea mai mare va fi diagonala BC. Pe această diagonală se va conecta voltmetrul. Schema rezultată este următoarea:

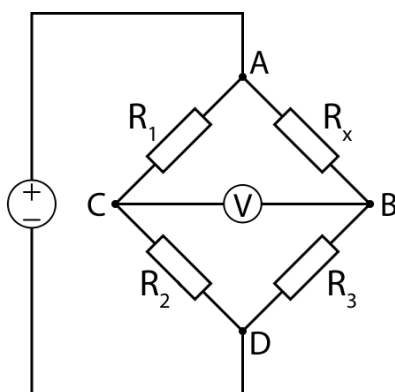


Fig. 74. Puntea Wheatstone cu voltmetru și sursă de tensiune.

Acesta este cazul ideal de funcționare a punții Wheastone. Rezistența R_x va fi determinată ca:

$$R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_{x_{ideal}} \Rightarrow R_{x_{ideal}} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} = \frac{1 \cdot 0,085}{100} = 0,00085 = 0,85 \Omega \quad (382)$$

b) În cazul măsurării cuadripolare schema punții Wheastone devine:

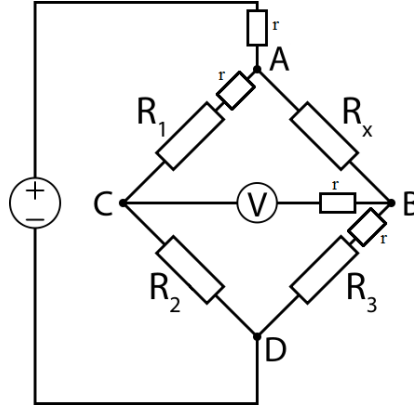


Fig. 75. Puntea Wheastone la măsurarea cuadripolară.

Rezistența r conectată în serie cu voltmetrul nu influențează funcționarea punții deoarece voltmetrul are, ideal, impedanță echivalentă infinită. Alt motiv ar fi acela că puntea este la echilibru, deci tensiunea pe diagonala pe care este conectat voltmetrul este nulă, așadar curentul prin respectiva rezistență va fi nul. Astfel această rezistență nu poate afecta funcționarea punții.

Rezistența r conectată între sursa de tensiune și borna A a punții nu influențează funcționarea punții **în această tratare**. Aceasta și cu rezistența echivalentă a punții formează un divizor rezistiv. Efectul acesteia este scăderea tensiunii aplicate punții Wheastone. Tensiunea de dezechilibru a punții este:

$$U_d = SE\sigma \quad (383)$$

unde S este sensibilitatea, E este tensiunea de alimentare a punții și σ este dezacordul normalizat, adică abaterea relativă a valorii rezistenței R_x față de valoarea care ar asigura o tensiune de dezechilibru nulă (punte la echilibru), notată cu $R_{x_{echilibru}}$.

$$\sigma = \frac{\Delta R_x}{R_x} \text{ sau, mai explicit, } \sigma = \frac{|R_{x_{de\text{ măsurat}}} - R_{x_{echilibru}}|}{R_{x_{echilibru}}} \quad (384)$$

Se observă în expresia (383) că o tensiune de alimentare mare este de dorit, așadar, în practică, o rezistență conectată în serie cu puntea, așa cum este cazul rezistenței r în discuție este nedorită. În această tratare voltmetrul se consideră ideal (poate măsura perfect orice tensiune, oricât de mică), așadar tensiunea aplicată punții nu mai influențează rezultatele (decât în cazul în care ar fi nulă, caz absurd).

Rămân în discuție numai două rezistențe r : cea conectată în serie cu R_1 și cea conectată în serie cu R_3 . Rezistența R_x măsurată în acest caz va fi:

$$(R_1 + r) \cdot (R_3 + r) = R_2 \cdot R_{x_{cuadripolar}} \Rightarrow$$

$$R_{x_{cuadripolar}} = \frac{(R_1 + r) \cdot (R_3 + r)}{R_2} = \frac{1000,05 \cdot 85,05}{100000} = 0,85054 \Omega \quad (385)$$

$$\varepsilon_{cuadripolar} = \frac{|R_{x_{cuadripolar}} - R_{x_{ideal}}|}{R_{x_{ideal}}} = \frac{|0,85054 - 0,85|}{0,85} = 0.063\% \quad (386)$$

Pentru rezistențele R_1, R_2 și R_3 se cunosc toleranțele, deci se poate determina eroarea cauzată de acestea în determinarea rezistenței R_x .

$$R_x = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} \quad (387)$$

Conform formulei propagării erorilor (vezi problema 1.17) rezultă eroarea în determinarea rezistenței R_x din cauza toleranțelor celorlalte 3 rezistențe din punte:

$$\varepsilon_{R_{xtoleranțe}} = \varepsilon_{R_1} + \varepsilon_{R_3} + \varepsilon_{R_2} = 0,1 + 0,1 + 0,001 = 0,201\% \quad (388)$$

Eroarea totală în determinarea lui R_x în cazul măsurării cuadripolare va fi:

$$\varepsilon_{total} = \varepsilon_{cuadripolar} + \varepsilon_{R_{xtoleranțe}} = 0,063 + 0,201 = 0,264\% \quad (389)$$

c) În cazul măsurării cuadripolare schema punții Wheastone devine:

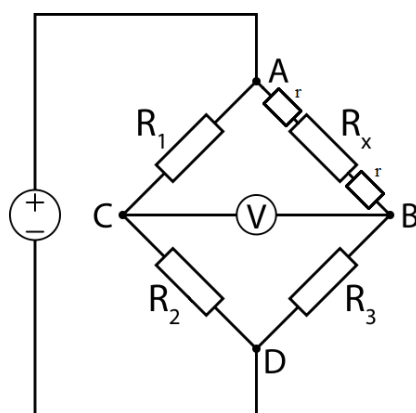


Fig. 76. Puntea Wheastone la măsurarea bipolară.

În acest caz este evident că valoarea măsurată a rezistenței necunoscute, notată $R_{xbipolar}$ va fi:

$$R_{xbipolar} = R_{xideal} + 2 \cdot r = 0,85 + 0,1 = 0,86 \Omega \quad (390)$$

$$\varepsilon_{bipolar} = \frac{|R_{xbipolar} - R_{xideal}|}{R_{xideal}} = \frac{0,1}{0,85} = 11,76\% \quad (391)$$

$$\varepsilon_{total} = \varepsilon_{bipolar} + \varepsilon_{R_{xtoleranțe}} = 11,76 + 0,201 = 11,961\% \quad (392)$$

Problema 4.3. Se cunosc $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_x = 1 \text{ k}\Omega$. Să se calculeze eroarea sistematică comisă la măsurarea rezistenței R_x din figura 77 în cazurile:

- Măsurare simplă;
- Măsurare *in-situ* la o punte cu echilibrare automată (ABB – Auto Balancing Bridge) ideală;
- Măsurare *in-situ* cu o punte cu echilibrare automată cu $R_g = 50 \Omega$ (rezistența de ieșire a generatorului).

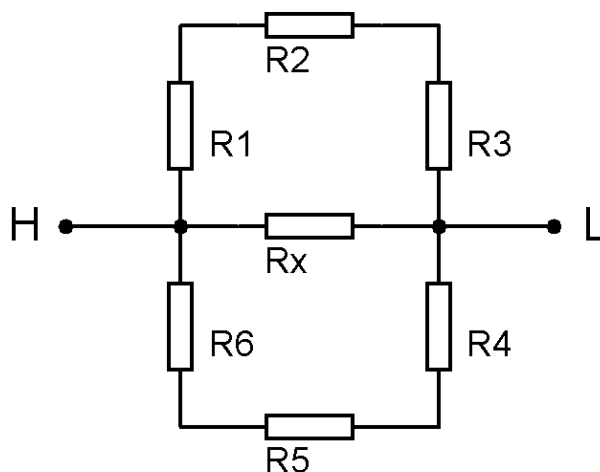


Fig. 77. Schema pentru măsurarea rezistenței R_x .

Rezolvare:

a) La măsurarea simplă se va conecta un ohmetru la bornele rezistenței R_x , adică la bornele H și L. Rezistența măsurată va fi:

$$R_{x\text{măsurat}} = R_x \parallel (R_1 + R_2 + R_3) \parallel (R_4 + R_5 + R_6) = 1 \parallel \frac{3 \cdot 3}{3+3} = 1 \parallel 1,5 = \frac{1 \cdot 1,5}{1+1,5} = 0,6 \, \Omega \quad (393)$$

Eroarea de măsură în acest caz este:

$$\varepsilon_{\text{măsurare simplă}} = \frac{|R_{x\text{măsurat}} - R_x|}{R_x} = \frac{|0,6 - 1|}{1} = 40 \% \quad (394)$$

b) Pentru măsurarea *in-situ* măsurarea se face conectând la masă terminalul care nu este conectat la rezistența de măsurat R_x al rezistențelor conectate la rezistența de măsurat R_x (R_1, R_3, R_4, R_6), ca în figura 78.

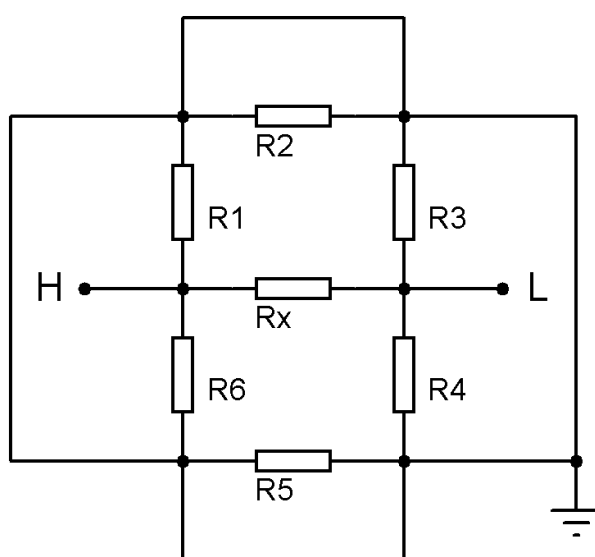


Fig. 78. Schema montajului care se va conecta la puntea cu echilibrare automată (între bornele H și L).

Se observă că rezistențele R_2 și R_5 sunt conectate între puncte de masă, deci tensiunea pe acestea este nula, curentul prin acestea este nul, așadar ele pot fi ignorate. Schema punții echilibrate la care s-a conectat circuitul din figura 78 este prezentată în figura 79.

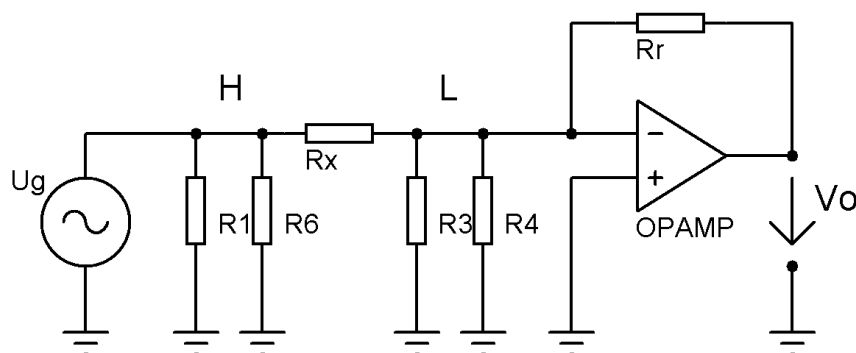


Fig. 79. Schema punții cu echilibrare automată ideală (rezistența de ieșire a generatorului este considerată nulă) la care s-a conectat circuitul din figura 78.

Se va evalua eroarea de măsură prin eroarea relativă dintre tensiunea de ieșire a schemei punții echilibrate în cazul ideal (în care nu se consideră efectele rezistențelor R_1, R_3, R_4, R_6), prezentat în figura 80 și tensiunea de ieșire a schemei din cazul din problemă prezentat în figura 79. Se va folosi valoarea absolută a acestor mărimi (interesează modulul amplificării pentru că ambele amplificatoare sunt inversoare).

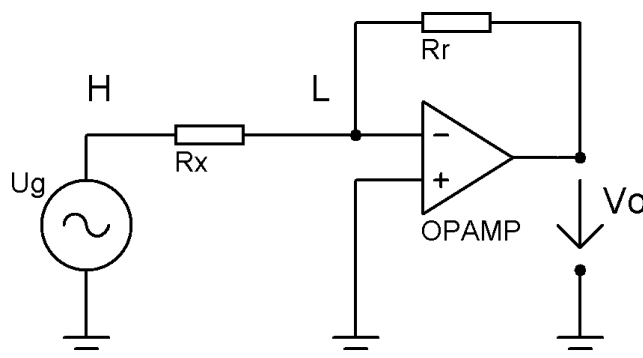


Fig. 80. Schema punții cu echilibrare automată în cazul ideal (în aceasta este conectată numai rezistența de măsurat R_x).

Circuitul din figura 80 este un amplificator inversor. Tensiunea de ieșire în cazul ideal va fi:

$$V_o = -\frac{R_r}{R_x} U_g \quad (395)$$

Înainte de a scrie expresia tensiunii de ieșire a circuitului din figura 79 se va determina dacă rezistențele R_1, R_3, R_4, R_6 influențează funcționarea acestuia.

Se observă că rezistențele R_3, R_4 sunt conectate între punctul real de masă și borna inversoare a amplificatorului operațional. Cum borna neinversoare a acestuia este legată la punctul real de masă și amplificatorul operațional este considerat ideal, borna inversoare va avea același potențial ca borna neinversoare și va constitui punct virtual de masă. Așadar tensiunea pe rezistențele R_3, R_4 va fi nulă, deci acestea nu influențează funcționarea circuitului și pot fi omise din analiză.

Rezistențele R_1, R_6 sunt conectate în paralel cu generatorul de semnal considerat ideal la acest punct (rezistența sa de ieșire este nulă), așadar ele vor constitui pur și simplu un consumator independent pentru generatorul de semnale. În situația ideală prezentată – generatorul este considerat ideal (cu alte cuvinte poate furniza oricât curent fără a se modifica tensiunea de ieșire) – nici aceste două rezistențe nu intervin în funcționarea punții. Așadar tensiunea de ieșire a punții din figura 79 ținând cont de observațiile de mai sus va fi:

$$V_{OABB \text{ cu generator ideal}} = -\frac{R_r}{R_x} U_g = V_o \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{V_{OABB \text{ cu generator ideal}}} = \frac{|V_{OABB \text{ cu generator ideal}} - V_o|}{|V_o|} = 0 \% \quad (396)$$

c) Schema punții cu echilibrare automată în cazul considerării unui generator de semnale real (cu rezistența de ieșire egală cu 50Ω) la care s-a conectat ansamblul din figura 78 este:

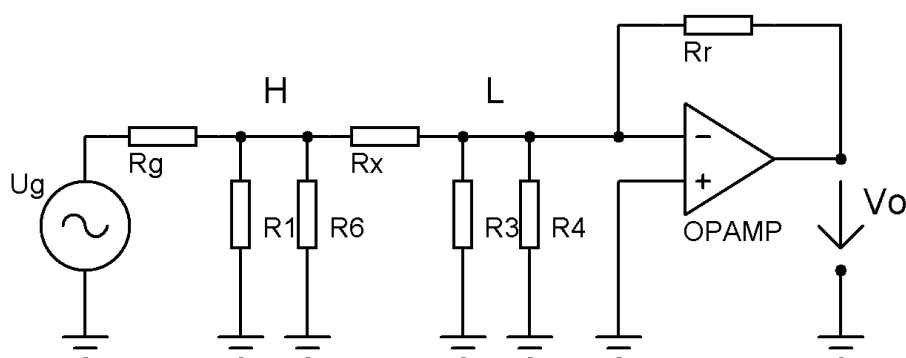


Fig. 81. Schema punții cu echilibrare automată reală (rezistența de ieșire a generatorului este considerată egală cu 50Ω) la care s-a conectat circuitul din figura 78.

Analizând din nou preliminar această schemă se observă că rezistențele R_3, R_4 sunt în aceeași situație, deci nu vor influența funcționarea punții. În schimb, rezistențele R_1, R_6 nu mai sunt conectate la bornele unei surse de tensiune ideale, așadar acestea vor influența funcționarea punții, așa cum se poate observa în expresia tensiunii de ieșire $V_{OABB \text{ cu generator real}}$. Gruparea paralel $R_{P1} = R_1 \parallel R_6$ este conectată în paralel cu rezistența R_x (borna inversoare a amplificatorului operațional este punct virtual de masă). Schema echivalentă simplificată este prezentată în figura 82.

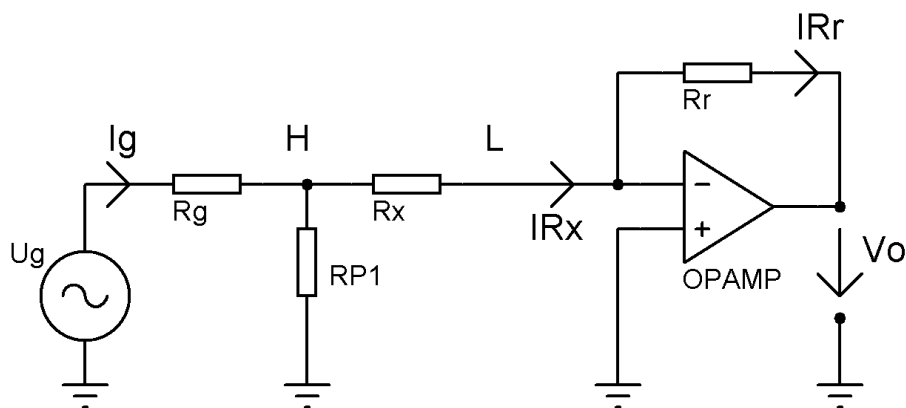


Fig. 82. Schema simplificată a punții cu echilibrare automată pentru cazul tratat.

Pentru că borna inversoare este punct virtual de masă, tensiunea de ieșire este tensiunea pe rezistența R_r păstrând sensul de la ieșirea amplificatorului operațional la borna inversoare a acestuia. Sensul curentului I_r fiind ales ca în figura 82 (contrar sensului tensiunii descris anterior), se poate scrie:

$$V_{O_{ABB} \text{ cu generator real}} = -I_{R_r} \cdot R_r \quad (397)$$

Cum amplificatorul operațional este considerat ideal, în intrările acestuia nu curge curent. Astfel $I_{R_r} = I_{R_x}$. Rezistențele R_{P1} și R_x formează un divizor de curent atacat de curentul I_g . Rezultă astfel:

$$I_{R_x} = \frac{R_{P1}}{R_x + R_{P1}} I_g \quad (398)$$

$$I_g = \frac{U_g}{R_g + (R_x \parallel R_{P1})} \quad (399)$$

$$V_{O_{ABB} \text{ cu generator real}} = -\frac{R_{P1}}{R_x + R_{P1}} \cdot \frac{U_g}{R_g + (R_x \parallel R_{P1})} R_r \quad (400)$$

Schema punții cu echilibrare automată cu generator real în cazul în care nu se consideră efectul rezistențelor R_1, R_3, R_4, R_6 este prezentată în figura 83.

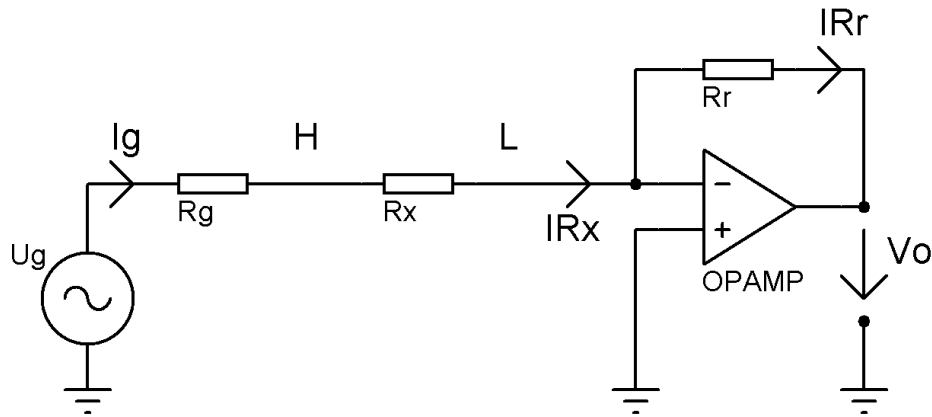


Fig. 83. Schema punții cu echilibrare automată cu generator real în cazul în care nu se consideră efectul rezistențelor R_1, R_3, R_4, R_6 .

Tensiunea de ieșire a circuitului din figura 83 notată cu V_o' pentru a face diferența față de situația de la punctul b) al problemei este:

$$V_o' = -\frac{R_r}{R_g + R_x} U_g \quad (401)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{V_{O_{ABB} \text{ cu generator real}}} &= \frac{|V_{O_{ABB} \text{ cu generator real}} - V_o'|}{|V_o'|} = \frac{\left| -\frac{R_{P1}}{R_x + R_{P1}} \cdot \frac{U_g}{R_g + (R_x \parallel R_{P1})} R_r + \frac{R_r}{R_g + R_x} U_g \right|}{\frac{R_r}{R_g + R_x} U_g} = \\ &= \frac{\left| -\frac{R_{P1}}{R_x + R_{P1}} \cdot \frac{1}{R_g + (R_x \parallel R_{P1})} + \frac{1}{R_g + R_x} \right|}{\frac{1}{R_g + R_x}} = \frac{\left| -\frac{0,5}{1+0,5} \cdot \frac{1}{0,05+0,33} + \frac{1}{0,05+1} \right|}{\frac{1}{0,05+1}} = \frac{|-0,877+0,952|}{0,95} = 7,89 \% \quad (402) \end{aligned}$$